BROLLACH

Scríobh mé na notaí seo i gcomhair chúrsa aon seimeastair d'fhochéimithe a bheidh á thabhairt ag Roinn na Matamaitice in Ollscoil na hÉireann, Má Nuad don chéad uair sa bhliain acadúil 2006-07.

Is de bharr tacaíocht lách ó Bhord Gaeilge na hOllscoile in Ollscoil na hÉireann, Má Nuad go raibh am agam na nótaí seo a scríobh. Ina theannta sin, ba mhaith liom buíoch a chur le daoine éagsúla. Thug Siobhán Ní Fhoghlú, Ruaidhrí O hUigínn, agus Áine Ní Ghallchóir cabhair dúinn an chúrsa seo a ullmhú. Bhí comhráite an-úsaideacha agam le Micheal Ó Searcóid agus Micheál Mac Fhlannchadha faoi scríbhneoireacht na matamaitice trí Ghaeilge. Táim buíoch freisin d'Antóin Ó Fearghaíl, Daithí Breathnach, and Fiacre Ó Cairbre a léigh roinnt de na nótaí seo: d'aimsigh siad earráidí go leor agus thug siad barúlacha úsáideacha dom freisin. Ach i dtaobh na botúnacha go léir atá fágtha anseo is ormsa an lucht iomlán. Thug An Coiste Téarmaíochta comhairle dom conas Gaeilge maith a chur ar théarmaí matamaitice éagsúla. Faoi dheireadh, ba mhaith liom buíoch a chur le mo bhean chéile, Denise, i gcomhair a foighne agus a tuiscint leis na hoícheanta fada a chaith mé ag scríobh na nótaí seo.

Stíofán M. Ó Buachalla
Meitheamh 2006

Clár

Caibidil 1

Réamhrá

1.1 Codaigh

Is é is **codach** ann ná tacar a fanann “casta” ar gach scála, is fiú cé chomh beag agus atá sé. Sampla amháin de chodach is ea cósta nádúrtha ar bith. Má fheiceann tú ar mhapa den domhan, feiceann tú go bhfuil imlínte na mór-ranna casta sa slí nach féidir linn iad a neasadh go maith le beagán mírlínte. Tá mapa na hEorpa ar chomhchastacht leis: i gcomparáid le mapa an domhain iomláin, tá castachtaí na mór-ranna eile caillte, ach in a n-ionad feictear castachtaí a bhí ró-bheag chun a bheith infheicthe ar mhapa an domhain iomláin. Sa slí chéanna, feictear castachtaí níos lú fós ar mhapa na hÉireann nó ar mhapa chuid bheag de chósta na hÉireann in ionad chastachtaí na tíortha eile a chailltear sna mapaí sin.

Feictear an feiniméan seo freisin i dtaobh mórán rudaí eile sa nádúr. Mar shampla, má fheiceann tú le micreascóp cumhachtach ar chill chrainn amháin nó ar ribe eilifinte amháin, tá cuma chomh casta orthu agus atá ar an gcrann nó ar an eilifint iomlán don tsúil nocht. Is é an castacht seo trasna gach scála (nó, le fírinne, trasna méid mór scálaí) an difríocht is tábhachtaí idir formhór na rudaí nádúrtha sa domhan timpeall orainn agus formhór na tacair and feidhmeanna matamaiticiúla a chonaic tú i do chúrsaí matamaiticiúla roimhe seo. Mar shampla, abair go ndéanann tú graf $y = f(x)$ i Maple, le feidhm ar bith f gur féidir leat a scríobh síos. Is cuma an roghnaíonn tú iltéarmach, feidhm triantánúil, feidhm easpónantúil, nó log, nó suim casta d’fheidhmeanna mar sin, feiceann tú go n-imíonn aon castachtaí a bhí sa ghraf ar eatramh mór as radhairc má roghnaíonn tú eatramh atá beag go leor. Mar shampla, b’fhéidir go dtugann ordú den fhoirm

```
plot(f(x), x=-10..10)
```

léaráid casta go leor duit (de réir rogha na feidhme f), ach go ródhócha tugann

```
plot(f(x), x=-2.376..-2.375)
```

rud an-chóngarach do dhronlíne duit. Mar shampla eile, machnaigh ar thacar na bpointí (x, y, z) a shásaíonn $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ i gcomhair uimhreach éigin $r > 0$. Is sféar le ga r timpeall an bhunphointe é seo, agus mar sin tá sé an-chuartha, ach má fheicimid ar chuid an-bheag ar bith de, tá cuma réidh mar phíosa phlána air (is dá bharr sin go gcreideadh le fada go raibh an domhan leibhéalta). Deirtear go bhfuil tacar **slim** má tá cuma a théann i réidhe air de réir mar a éiríonn an scála níos lú: is é seo an contrárthacht díreach de choincheap codaigh.

Ar feadh fhormhór a staire, d'fhan matamaitic amach ó chodaigh agus níor pléadh ach amháin tacair a raibh roinnt slime acu. Go deimhin, is i 1975 a chumadh *fractal/fractale* (aidiacht/ainmfhocal), an focal Francach do *chodach*; b'é Benoît Mandelbrot (1924–), an matamaiticeoir Polannach-Francach a chum é. Fuair taighde ar chodaigh an-chuid cabhair agus spreagadh ó theacht ríomhairí agus teaspáintí ghrafacha nua-aimseartha.

Mar sin féin, luadh roinnt samplaí de chodaigh fadó. I 1872, shainigh an matamaiticeoir Gearmánach Karl Weierstrass (1815–1897) feidhm f a bhí do-dhifreálaithe ag gach pointe ach freisin leanúnach ag gach pointe; anois ghlaofaí codach ar ghraf na feidhme sin. Ba deacair é sampla Weierstrass a shamhlú ach d'aimsigh an matamaiticeoir Sualannach Helge von Koch (1870–1924) sampla i bhfad níos simplí i 1904. Tugann an coincheap de chóras feidhme atrialla slí tábhachtach dúinn chun codaigh a shainiú agus rinne daoine mar Poincaré, Fatou, agus Julia mionfhiosrú ar an gcoincheap seo go déanach sa 19ú haois agus go luath sa 20ú haois. Pléifimid go chúramach é i gCaibidlí 2 agus 3.

Chonacthas tacair den tsaghas seo mar thacair iargúlta aisteacha go dtí gur chuir Mandelbrot chun suntais na hairíonna atá i gcoitianta acu: mar shampla, i gcás a bhformhór díobh, tá siad féinchosúil, agus ní slánuimhreacha iad a dtoisí. Pléifimid i gCaibidil 3 cad is brí le toise codánach, ach sainíodh a leithéad de rud go luath sa 20ú haois. Scaip Mandelbrot eolas i measc an phobail ar chodaigh freisin trí theaspeáint gur samhlacha réadúla agus úsáideacha iad i gcomhair mórán feiniméin nádúrtha, mar shampla

- cruth chóstaí agus gnéithe geolaíochta eile;
- struchtúr plandaí, soithigh fola, agus scamhóga;
- praghasanna sa stocmhargadh;
- Brúnghluaisne.

D'áitigh sé go raibh codaigh níos imfhiosaí agus nádúrtha ná na rudaí slime sa mhatamaitic traidisiúnta. Ar leathanach 1 de *The Fractal Geometry of Nature* [11], deireann Mandelbrot:

> Clouds are not spheres, mountains are not cones, coastlines are not circles, and bark is not smooth, nor does lightning travel in a straight line.

Toisc go bhfuil codaigh casta go dúchasach, is maith an rud é roinnt coincheaptha réasúnta simplí a bheith againn chun roinnt dá n-airíonna is tábhachtaí a achoimriú. Ceann de na coincheaptha is tábhachtaí den tsaghas seo is ea toise tacair. Is amhlaidh gur ann do roinnt mhaith coincheaptha éagsúla de thoise ach aontaíonn siad go léir lenár gcoincheap imfhiosach de thoise i gcomhair tacar slim. Mar shampla, tá toise ghraf feidhme slime $y = f(x)$ cothrom le 1 (mar tá cuma mírlíne ar aon chuid bheag de), agus tá toise sféir cothrom le 2 (mar tá cuma phlána ar aon chuid bheag de). Ach de ghnáth ní slánuimhir é toise chodaigh! Pléifimid cúpla choincheap de thoise i gCaibidil 3: tá toise Minkowski níos simplí ná toise Hausdorff, ach tá airíonna níos deasa ag an dara ceann agus ligeann sé dúinn coincheaptha mar fhad agus achar a chur i bhfeidhm ar chodaigh.

1.2 Córais dhinimiciúla agus anord

Is dócha gur chuala tú am éigin an frása **Iarmhairt an Fhéileacáin** (*Butterfly Effect* as Béarla), comhchiallach faiseanta beoga d'anord. Go deimhin, b'é *The Butterfly Effect* tideal scannáin ó 2004 ina nglac Ashton Kutcher an phríomhpháirt. Cuirtear an smaoineamh féin i leith an meitéareolaí Meiriceánach Edward Lorenz (1917–) a thug léacht i 1972 dar teideal *Predictability: Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil Set off a Tornado in Texas?* B'fhéidir gurb é an gearrscéal *A Sound of Thunder* a scríobh Ray Bradbury i 1952 a spreag an tagairt d'fhéileacán: sa scéal seo, seasann amthaistealaí ar fhéileacán de thimpiste san am atá thart i bhfad, agus is é sin cúis athruithe móra san am i láthair. Bhí smaoineamh Lorenz bunaithe ar an bhfíric gur cosúil leis gur ball í an aimsir de na córais thúsluacha sin inar bhféidir le dhá thacair de thúsluacha A and B atá an-chosúil dá chéile (b'fhéidir gurb é bualadh sciatháin fhéileacáin an t-aon difríocht eatarthu) a bheith comhfhreagrach le réiteacha (.i. aimsir sa todhchaí) a fhorbraíonn ionas go méadaíonn an difríocht beag seo le himeacht ama go dtí go bhfuil sé an-mhór (b'fhéidir gurb é tornádó an difríocht eatarthu) tar éis tréimhse sách fhada (bliain, mar shampla).

Bhí samhaltú matamaiticiúil na haimsire ina fhíorthosach sna 1960idí nuair a rith Edward Lorenz samhlacha turgnamhacha simplí ar a ríomhaire. Tar éis dó seicheamh amháin a rith, shocraigh sé mar eolaí maith chun é a athdhéanamh, agus mar sin d'athiontráil sé uimhir óna aschur, a bhí leath bealaigh trí sheicheamh tréimhsí ama, agus lig sé dó rith ar aghaidh arís. Ag an am sin, bhí na ríomhairí níos maille, agus mar sin d'imigh sé as an áit, agus tar éis teacht ar ais dó, bhí ionadh mór air toisc go raibh na torthaí an-difriúil ó thorthaí an chéad turgnaimh. Faoi dheireadh thuig sé an chúis: toisc go raibh beagán leisce air ag an am, bhí an uimhir 0.506 iontrálaithe aige in ionad an uimhir 0.506127 a bhí san aschur. Roimhe sin ghlac sé leis go bhfanfadh earráid beag, beag sa toghchaí, ach ina áit sin, d'éirigh an earráid i bhfad níos mó. Tar éis turgnaimh breise, fhionnaigh Lorenz gur cuma cé chomh beag is atá an difríocht idir dhá choinníollacha tosaighe—fiú amháin difríocht sa 20ú ionad deachúlach, difríocht a bheadh i bhfad ró-bheag chun é a thomhais—i ndeireadh na dála beidh réitigh an-difriúla acu. Toisc gur ciallmhar an rud é iarracht a dhéanamh ar earráidí thomhais a íoslaghdú ach ní féidir linn riamh iad a scrios amach go hiomlán, leanann sé ó seo nach bhfuil dóchas ar bith ann chun réiteach fadtéarmach a aimsiú cé go bhfuil an córas sothuartha sa ghearrthéarma (.i. is féidir linn na cothromóidí a réiteach go huimhriúil ceart go dtí aon chéim chruinnis gur mian linn). Tá go leor córais den saghas seo atá *spleách go híogaireach ar choinníollacha tosaighe* agus is ceann de na hairíonna sainiúla de chórais anordúla é seo i gcomórtas le córais cobhsaí.

Pléadh spleáchas íogair ar choinníollacha tosaighe agus cobhsaíocht córas i bhfad roimh Lorenz. Cóirigh Oscar II, Rí na Sualainne agus na hIoruaidhe comórtas matamaiticiúil i 1889 chun a 60ú breithlá a cheiliúradh. Bhí duais ann don pháipéar is fearr a bhí baint aige le ceann ar bith d'fhadhbanna matamaiticiúla deacra éagsúla. B'é an matamaiticeoir Francach cáiliúil Henri Poincaré (1854–1912) a bhuaigh an duais i gcomhair a pháipéar ar fhadhb trí chorp (cur síos a dhéanamh ar ghluais trí chorp, mar an ngrian agus dhá phláinéad faoi imtharraingt). Anseo d'fhorbair sé codanna tábhachtacha de theoiric chóras dinimiciúil agus de theoiric anoird. Go háirithe thaispeáin sé go bhféadfadh gluais trí chorp a bheith éagobhsaí agus anordúil.

Tosnaíonn cúlra d'obair Poincaré leis an matamaiticeoir/fisicí cáiliúil Sasanach Isaac Newton (1643–1727), a chruthaigh go bhfuil grianchóras dhá choirp (.i. an ghrian agus plainéad amháin) peiriadach (agus mar sin cobhsaí go hiomlán). Tá fadhb trí chorp i bhfad níos deacra agus anois is eol dúinn nach féidir é a réiteach go cruinn. D'ainneoin doríofacht an réitigh cruinn, b'fhéidir gur féidir linn a rá ar a laghad an bhfuil an córas cobhsaí nó éagobhsaí. Bheadh an córas neamhcobhsaí dá mba rud é go raibh sé spleách go híogaireach ar choinníollacha tosaighe, nó níos measa fós: an mbeidh an domhan i gcónaí ag an bhfad céanna (nó beagnach é) ón ngrian, nó an déanfaidh an domhan bís isteach sa ghrian nó amach fad ón ngrian de bharr imtharraingt na bplainéad mór? Rinne an matamaiticeoir Francach cáiliúil Pierre-Simon Laplace (1749–1827) iarracht ar an fhadhb seo a réiteach trí ghlacadh le roinnt simplithe, ach go tubaisteach chuir na simpithe seo a chuid oibre ó bhailíocht. Is amháin tar éis obair Poincaré gur thuig le daoine go gcuirfeadh beagnach aon simpliú réasúnta den fheidhm an réiteach ó bhailíocht san fhadtéarma. Go bunúsach níl aon aicearraí ann más maith leat an fhorbairt fhadtéarmach de chóras anordúil a ríomhadh ó na coinníollacha tosaighe.

Níos déanaí rinneadh roinnt dul chun cinn bhreise ar fhadhb chobhsaíocht an ghrianchórais. D'fhorbair na matamaiticeoirí Andrei Kolmogorov (Rúiseach; 1903–1987), Vladimir Arnol'd (Rúiseach; dalta de Kolmogorov; 1937–) agus Jürgen Moser (Gearmánach-Meiriceánach; 1928–1999) an teoiric ar a nglaotar **teoiric KAM** anois. Deireann toradh amháin den teoiric cumhachtach seo dúinn go bhfuil grianchóras cobhsaí má tá sé múinte go leor, ach ní thugtar freagra dúinn i leith ár ngrianchóras féin. Ar an dtaobh eile, i ngrianchórais atá fiáin go leor is cinnte go bhfuil fadhbanna: dá mba rud é go raibh mais Iúpatair níos mó faoi 100 ná mar atá sé, athrófaí fithis an domhain an oiread sin nach bhféadfá beatha den saghas ar a bhfuil aithne againn maireachtáil. An bhfuil ár ngrianchóras ar an dtaobh ceart den líne dhealaithe idir córais múinte agus córais fiáine? Níl a fhios again! Dar ndóigh, fiú amháin más córas múinte é ár ngrianchóras, nuair atá tréimhsí an-fhada á phlé againn is gá dúinn a bheith buartha faoi éifeachtaí imtharraingteacha taobh amuigh d'ár ngrianchóras féin: b'fhéidir go ndruidfeadh réalta éigin ró-chóngarach dúinn agus go gcuirfeadh sí ár ngrianchóras trína chéile, nó b'fhéidir go gcuirfeadh abhacréaltra ár gceantar den Réaltra trína chéile.

Maidir arís leis an tsimplíocht choibhneasta d'ár ngrianchóras ar leith, mheas an matamaiticeoir Francach Jacques Lasker go huimhriúil i 1989 go méadófaí earráid tosaigh de 15 méadar i suíomh an domhain ar a fhithis le himeacht ama go dtí nach mbeimis in ann aon rud a rá faoi shuíomh an domhain ar a fhithis tar éis 100 milliún bliain, nó mar sin.

I gcás mórán córais, is féidir iad a fheiceáil go teibí mar thacar sonraí D (mar shampla i gcás fithise an domhain, is iad na sonraí ná luas agus suíomh an domhain i gcoibhneas leis an ngrian), in éineacht le feidhm f a thugann na sonraí nua dúinn aonad amháin ama sas todhchaí (b'fhéidir bliain i gcás an domhain). Más maith linn dul dhá aonad ama sa todhchaí, is iad na sonraí nua ansin ná $f(f(D))$; go gearr scríobhaimid mar $f^2(D)$ é seo. Tá an cheist faoi stáit an chórais tar éis 100 milliún aonad ama ar chomhbhrí le ríomhadh luach $f^{100\,000\,000}(D)$. De ghnáth ní hé luach cruinn an rud sin ina bhfuil suim againn ach ina áit sin teastaíonn uainn a aimsiú an bhfuil $f^{100\,000\,000}(D')$ cóngarach do $f^{100\,000\,000}(D)$ gach am atá na tacar sonraí D' and D cóngarach dá chéile. I gcás córais cobhsaí, is fíor é sin, ach i gcás córais anordúla, ní fíor é má roghnaímid péire tipiciúil de thacar sonraí D, D'.

Mhol Lorenz mionscrúdú a dhéanamh ar fheidhmeanna cearnacha simplí cosúil leis an bhfeidhm loighistic $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \lambda x(1 - x)$, $\lambda > 0$, mar shamhlacha maithe do chórais anordúla casta cosúil leis an aimsir. Sa lá atá inniu ann tuigimid dinimic na feidhme loighistice maith go leor, agus tabharfaimid mionchuntas ar an ábhar sin sna nótaí seo.

1.3 Na nótaí seo

Leanann beagnach gach cruthúnas sna nótaí seo ó theoiric bhunúsach d'fheidhmeanna leanúnacha agus indifreálaithe ar $\mathbf{R}$, mar a fheictear í i gcúrsa calcalas na chéad bhliana. Anois is arís, déanfaimid tagairt do spásanna méadracha ach formhór an ama, ní úsáidfimid ach amháin an méadrach (fad) Eoiclídeach coitianta ar $\mathbf{R}$. Déanfaimid roinnt turgnaimh le Maple, agus mar sin beidh ort Maple a úsáid chun na codanna sin a thuiscint agus a scrúdú go hiomlán.

Gaeilge. Scríobh mé na nótaí seo as Béarla i dtosach agus ansin d'aistrigh mé go Gaeilge iad. Bhí na foclóirí seo a leanas an-úsáideach: Ó Dónaill [20], de Bhaldraithe [19], agus an Foclóir Eolaíochta [21]. Bhain mé úsáid freisin as na suímh Ghréasáin seo a leanas: [22] (foclóir Gaeilge-Béarla-Gaeilge), [23] (graiméar cuimsitheach), agus [24] (leathanach baile do liostaí téarmaíochta cuimsitheacha éagsúla). I gcomhair aon fhocal matamaiticeach nach dtuigeann tú sna nótaí seo, ba cheart duit féachaint i dtosach sa ghluais atá ag deireadh na nótaí. Go háirithe faightear ann aistriúcháin Béarla do bheagnach gach tearmá a scríobhtar i **gcló throm** sna nótaí seo (agus roinnt téarmaí eile freisin).