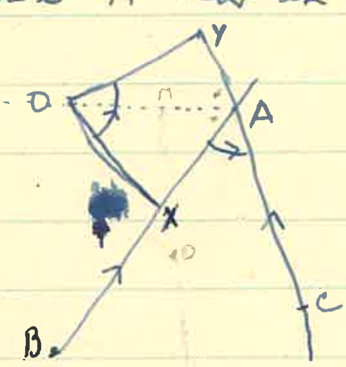
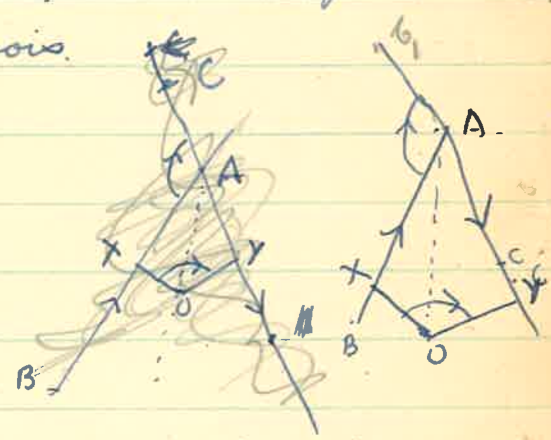
Caibidil VII

Uilleacha i gCiorcal Tadlaithe

I gCaib II nuair leagtar dronlíne l ar cheann eile m le casadh an phlána timpeall a bpointe teagmhála A, is léir go bhfanann A féin socair, agus go gcuirtear pointe B den líne l ar an bpointe C den líne eile ionas go bhfuil AB = AC. Is mian linn anois tabhairt faoin gcasadh a bhreithniú a chuirfeas AB faoi dhronlíne eile AC ionas go dtuitfidh B ar C, nuair nach bhfuil AB = AC ní hé A lár an chasta anois.





Feicfimid go bhfuil dhá chasadh dhifriúla a fheileas don cás de réir an treo ar leith ina gcuirtear an casadh i ngníomh.

Má 'sé O lár an chasta is eol dúinn (Teoirm VIII alt. 3) go bhfuil sé ar chómhroinnteoir éigin de dhá chómhroinnteoir na n-uilleann A. Má 'siad OX, OY na hingir uaidh ar na línte, is soiléir go gcuirfear OX ar OY ionas gurb í $X\hat{O}Y$ uille an chasta.

Ach sa gceathairshleasán OXAY 'sé 360° suim na n-uilleann istigh (Caib IV), agus 'sé dronuilleacha iad X agus Y, fágann sin $X\hat{O}Y$ = forlíon $X\hat{A}Y$ = $B\hat{A}C$ (Fogh! $B\hat{A}C$ ∴ II)
Sin í go díreach an uille den dhá uilleann ~~idir na línte atá~~ idir na línte atá in aon treo le h-uillinn an chasta.

∴ Má leagtar líne l faoi líne m le casadh an phlána, is ionann uille an chasta (idir méad is treo) agus an uille idir l agus m a fhreagraíos di.

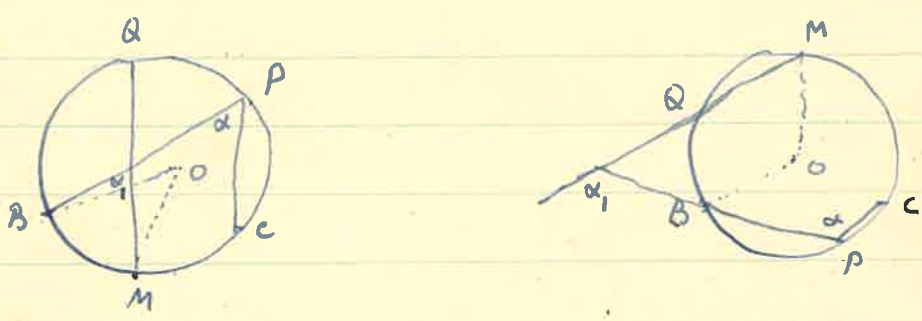
Is furasta anois an dá chasadh a chinneadh a leagas dronlíne BA ar dhronlíne CA i gcaoi go dtuitfidh B ar C.

Mar, de bhrí go gcaithfidh B agus C a bheith cómhfhada ó lár an chasta, luíonn an lár úd ar ais shuiméitreacha BC. Ach tá sé ar chómhroinnteoir den uillinn A é freisin ∴ Siad pointí teagmhála a.Δ BC le dhá chómh-roinnteoir na h-uilleann A, lár an dá chasadh a fheileas.

Léiríonn an dá theoirim seo a leanas cé'n chaoi a bhfuil siad i ngaol leis an Δ ABC.

Teoirim XXI

Is ionann an uille a ghabhas stuagh ciorcail ag an imlíne agus an uille a ghabhas leath an stuagh sin ag lár an chiorcail



Hipotéis : 'Sé M lár an stuagh BC, agus pointe den imlíne ísea P.

Tátall : Tá $B\hat{P}C = B\hat{O}M$.

Cruthúnas Cas an plána timpeall O tré'n uillinn $B\hat{O}M$, iónnus go dtéann B go dtí M, agus go ngluaiseann P ar imlíne an O go dtí Q.

∴ Tá stuagh BM = stuagh PQ agus sé MQ íonad nua BP.
Sé sin, tá uille an chasta $B\hat{O}M = \hat{\alpha}_1$.
Ach tugtar stuagh BM = stuagh MC.

∴ Tá stuagh MC = stuagh PQ, iónnus gurb í an láirlíne chéanna is ais shuiméitreachta do PC agus QM.

Fágann sin go bhfuil PC ∥ QM, agus tá $\hat{\alpha}_1 = \alpha$ (Tr. XI)

∴ $B\hat{O}M = B\hat{P}C$ Q.E.D.

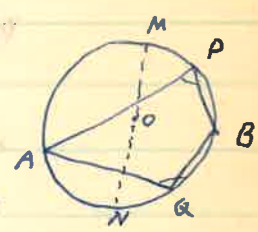
Téarmaí Gineann córda ciorcail agus stuagh ar bith den dá cheann a ghearras sé den imlíne, fíoghair iadta d'a ngoirtear teascán ciorcail.

Pointí cómhchiorcalacha isea ceithre pointí (nó tuille) a ngabhann ciorcal tríothu uilig, agus tugtar ceathairshleasán cómhchiorcalach ar an gceathairshleasán a ghineas siad.

Atora 1 Is buan don uillinn $B\hat{P}C$ cébí cé'n áit ar an stuagh BPC a bhfuil an pointe P.
Mar is ionann ∠ agus BOM atá seasmhach.
Tugtar uille an teascáin APB ar an uillinn sin.

Atora 2 Is dronuille í uille leithchiorcail.

Atora 3 I gceathairshleasán chómhchiorcalach uilleacha fóirlíontacha isea na h-uilleacha atá ar aghaidh a chéile.



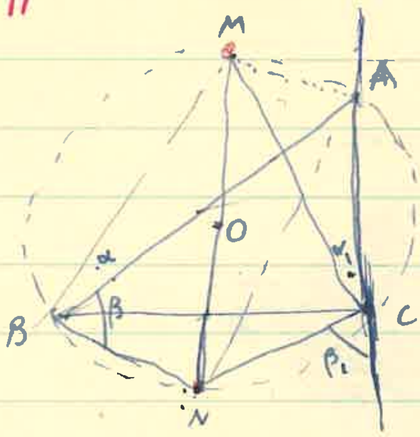
Mar, is leithchiorcal é an tsuim nuair suimitear leath an stuagh APB le leath an stuagh AQB.

Atora 4 I gciorcal ar bith (nó i gciorcail chómhionanna) is cómhfhada na stuaghanna a gabhas uilleacha cothroma ag an imlíne, agus is fíor an coinvéarsa.

Mar, stuaghanna isea iad a ghabhas uilleacha cothroma ag an lár freisin, de réir na teoirme.

Teoirim XXII

Má cuirtear dronlíne BA fan dronlíne eile CA i gcaoi go dtitfeann B ar C le casadh, comhroinneann lár an chasta stuagh den dá stuagh BC ar an gciorcal ABC.



Hipotéis 'Siad M, N pointí teagmhála a.s. BC le comhroinnteóirí na huilleann A.

Tátal Tá M, N ar an ⊙ ABC, agus lár na stuagh BC isea iad.

Tógáil Faigh O, lár MN.

Cruthúnas*

[* Footnote bé gur fusa cruthúnas neadíreach is ionspéisiúla an ceann seo]

De bhrí go gcomhroinneann AN, AM uilleacha comhgharacha ag A, dronuille isea MAN, agus sé O (~~...~~ ionlár an △ MAN.

Sa geasadh timpeall M, cuirtear $\hat{\alpha}$ ar $\hat{\alpha}_1$, $\therefore \hat{\alpha} = \hat{\alpha}_1$

Sa geasadh timpeall N, cuirtear β ar $\hat{\beta}_1$ $\therefore \hat{\beta} = \hat{\beta}_1$

$\therefore \hat{\alpha} + \hat{\beta} = \hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1$

Ach tá $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = M\hat{C}N$ (seáthe a chéile in MN)

$\therefore$ Tá $M\hat{C}N$ = a fóirlíon $\hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1$, $\therefore$ dronuille isea MCN (agus MBN)

$\therefore$ Sé O ionlár na △ MNC agus MNB chomh maith.

Gabhann an ⊙ ar lár dó O agus ar ga dó OM tré na pointí M, A, C, N, B go léir.

De bhrí gurb í MN a.s. BC, 'siad M, N lár na stuagh BC.

Atóra ~~Nuair castar plána timpeall O, má tuiteann cuirtear~~ B ar

Má cuirtear pointe B ar phointe C de bharr casta ar bith, leagtar dronlíne ar bith tré B fan na dronlíne sin tré C a theangmhaíos leis an gcéad cheann ar an gciorcal tríd B, C agus lár an chasta.

[Tuigfear i dTeoirim XXV céard a thárlaíos don líne BC féin]

iaghlai ag C ←

Ceisteanna

1) Cruthuigh gur dronuilleóg é gach ▱ comhchiorcalach

2) Má síntear slios ceathairshleasáin chomhchiorcalaigh, taispeáin gurb ionann an uille amuigh agus an uille atá ós a chóir istigh. Luaidh an casadh a chuireas uille acu ar an gceann eile.

3. Má's pointí iad M agus A atá ar aon taobh amháin den bhonn BC ionnas go bhfuil $M\hat{B}A = M\hat{C}A$, cruthuigh nach bhféadfadh an ⊙ MBA an líne AC a ghearradh i bpointe ar bith eile thairis C gan teoirim $\boxed{XXI}$ a bhréagnú.

Tabhair, ar an gcuma sin, cruthúnas neadíreach i gcóir Tr $\underline{XXII}$

4 Milleacha fórlíontacha iseadh dhá uillinn atá ar aghaidh a chéile i gceathairshleasán. Cruthuigh gur ceathairshleasán comhchiorcalach é.

5. Siad BL, CM na hingir ó B, C ar shleasa AC agus BA an △ ABC. Cruthuigh gur pointí comhchiorcalacha iad B, C, L, M.

6 Milleacha sa teascán céanna iad BPC, BQC. Luaidh casadh a leagfas uille acu ar an gceann eile.

Nach ceart a chur leis nach [illegible] leis an imlíne [illegible] ?

<u>Téarma</u> Tugtar <u>tadhlaí</u> ar dhronlíne a theagmhaíos leis an imlíne in aon phointe amháin (an pointe tadhaill). agus ~~nach bhfuil~~ teagmháil eile leis pé treo ina síntear an tadhlaí.

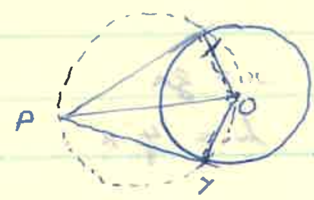
Ag pointe P den imlíne má tarraingítear an dronlíne tré P atá ingearach leis an nga OP, is follusach go bhfuil gach pointe X den líne sin (cé 's moite de P féin) taobh amuigh den imlíne, mar OX > ga an ⊙ OP. (teoirim $\boxed{XIX}$)

∴ Tadhlaí is ea PX

Mar an gcéanna is é PX an t-aon tadhlaí amháin tré P, de bhrí gurb é OP an fhad is giorra idir O agus tadhlaí ar bith tré P, agus fágann sin gurb é OP an t-ingear ó O ar an tadhlaí.

Teoirim XXIII

Is féidir dhá thadhlaí a tharraint go dtí ciorcal ó phointe ar bith taobh amuigh.



Abair gurb é O lár an ⊙, agus gurb é P an pointe a tugtar.

Tógáil ~~Cruthúnas~~

Línigh an ⊙ gurb í OP a láirlíne agus tabhair X is Y ar na pointí ina ngearrann sé an ⊙ a tugtar.
'Siad PX agus PY an dá thadhlaí ó P.

Cruthúnas

Uillinn leithchiorcail iseadh $O\hat{X}Y$, ionnas gur dronuillinn í (Teoirim XXI)

Fágann sin PX ⊥ leis an nga OX.

∴ 'Sé PX an tadhlaí ag X, agus mar an gcéanna 'sé PY an tadhlaí ag Y.

Atora 1 Scátha a chéile in OP iseadh PX agus PY.

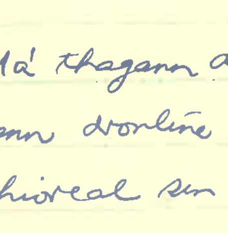
Atora 2 Má cuirtear dronlíne ar dhronlíne eile le casadh timpeall phointe O, tadhlann gach dronlíne acu ⊙ áirithe gurb é O a lár.

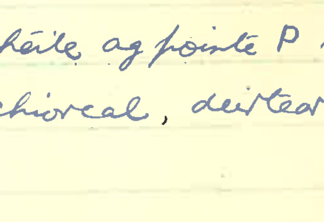
Mar pointe ar chómhroinnteoir na h-uilleann eatorra iseadh O, agus is cómfhada na h-ingir uaidh ar an dá líne.

Téarma Má thagann dhá chiorcal le chéile ag pointe P i gcaoi go dtadhlann dronlíne tré P an dá chiorcal, deirtear go dtadhlann an dá chiorcal sin a chéile ag P.

Teoirim XXIV

Má thadhlann dhá chiorcal a chéile, tá an pointe tadhaill ar dhronlíne cheangail na lár.





Hipotesis Tadhlann PZ an dá chiorcal.

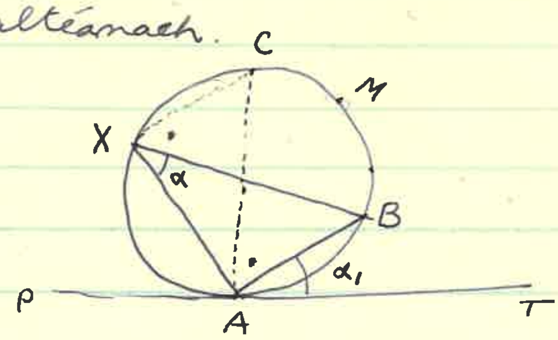
Tátal Luigheann P ar an dronlíne OO_1.

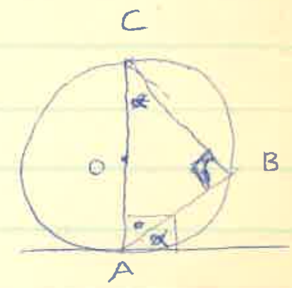
Cruthúnas De bhrí gur tadhlaí é PZ don dá ⊙, luigheann O agus O_1 ar an ingear ~~do~~ ar PZ ag P.
∴ Aon dronlíne amháin iseadh POO_1 Q.E.D.

C.

Teoirim ~~XXIV~~ XXV

Tá an uille idir thadhlaí ciorcail agus córda ar bith tré'n bpointe tadhaill, cóimhionann leis an uillinn san teascán alteánach.





Hipotesis Tadhlaí agus córda isea AT agus AB, agus pointe ar bith sa teascán ACB isea X.

Tátall Tá $\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}$.

Tógáil Tarraing an láirlíne AC, agus faigh M lár an stuaigh ACX.

Cruthúnas

Dronuilleacha isea $C\hat{X}A$ (uille leithchiorcail), agus $C\hat{A}T$ (idir láirlíne agus an tadhlaí).

∴ Tá $C\hat{X}A = C\hat{A}T$

De bharr chasta tré'n uillinn $X\hat{M}A$ timpeall M, cuirtear X ar A, agus leagtar XC fan AC (teoirim XXI).

Agus de thairbhe $C\hat{X}A = C\hat{A}T$, is fan ~~na líne~~ an tadhlaí AT a leagtar XA.

Ach is fan na líne AB a leagtar XB (teoirim XXI)

∴ buirtear $\hat{\alpha}$ anuas go cruinn ar $\hat{\alpha}_1$. ∴ Tá $\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}$

Q.E.D.

Atora

Tá $P\hat{A}B$ (fórlíon $\hat{\alpha}_1$) = uille an mhionteascáin AB.

Cleachtaithe

1) Cruthuigh gur dronuilleóg é gach paralleilogram cóimhchiorcalach

2) Má sínítear slios ceathairshleasáin chómhchiorcalaigh, teaspáin gurb ionann an uille amuigh agus an uillinn atá ós a cóir istigh.

(6) I gceist 5 má thárlaíonn go bhfuil X, Y, Z in aon dronlíne amháin, cruthuigh go bhfuil D ar iomchiorcal an ΔABC freisin.

7) Triantán i gciorcal idea ABC agus 'sé M lár an stuaigh BC a ghabhas an uille A. Tarraingítear ingir MX agus MY ar na sleasa AB agus AC. Tré chasadh timpeall M, cruthuigh:-

(a) go bhfuil an dá thriantán BXM agus CYM congruach;

(b) má's ar A_1 a cuirtear A, go bhfuil $AY = YA_1$; $AX = AY = \frac{1}{2}(AB + AC)$; $BX = CY$ = leath na difríochta idir AB is AC:

(c) go bhfuil $B\hat{M}X = C\hat{M}Y$ = leath na difríochta idir na h-uilleacha B agus C.

8) I gceist 7 má 'siad NP agus NQ na h-ingir ar na sleasa AB, AC ó lár an stuaigh BAC, cruthuigh (i) go bhfuil $BP = CQ = \frac{1}{2}(AB + AC)$; (ii) go bhfuil $AP = AQ$ = leath na difríochta idir AB is AC.

Lóci

Má ghluaiseann pointe sóinseálach i gcaoi go bhfuil coinníollacha geoméitreacha á chóimhlíonadh aige ar feadh na gluaiseachta tugtar rian nó lócus an phointe ar an lúib a ghfineas sé.

Iarrtar ar an léitheoir na somplaí seo a thabhairt fá deara.

An Coinníoll	An Rian
(a) Tá pointe sóinseálach an fhad chéanna ó dhá phointe shuite A, B	Ais shuiméitreachta na dronlíne AB. (teoirim IV)
(b) Tá pointe sóinseálach an fhad chéanna ó dhá dhronlíne shuite l, m.	Dhá ais shuiméitreachta na línte l, m, má's línte trasghabhálacha iad, ach dronlíne atá // leo má's línte // iad.
(c) Pointe sóinseálach idea P ionnus go bhfuil buan-fhairsinge sa ΔPAB	Dronlíne atá // le AB (teoirim $\boxed{XVI}$)
(d) Pointe sóinseálach idea P ionnus gur buan-uille é $A\hat{P}B$. Má's dronuille é $A\hat{P}B$	Stuagh ciorcail dírithe tré A, B. (teoirim $\boxed{XXI}$) Ciorcal ar AB mar lárlíne.

Cleachtaithe

1) Tadhlann dhá chiorcal a chéile ag T, agus ar dhá chórda TX agus TY i gciorcal ~~acu~~ acu ~~'siad~~ is iad TL, TM na córdaí a ghearras an ⊙ eile. Cruthuigh (i) go bhfuil LM // le XY, agus (ii) go bhfuil na tadhlaithe ag L agus X parallèileach.

2) Triantán i gciorcal is ea ABC, agus is i bpointe P a theagmhaíos an tadhlaí ag A leis an mbonn BC. Cruthuigh go bhfuil uilleacha an triantáin PAB ~~cóm~~ cómhionann le h-uilleacha an triantáin PCA.

3) 'Siad P agus Q pointí teagmhála dhá chiorcal ar láir dóibh O agus O_1, agus córda dúbailte ar bith is ea LPM. Cruthuigh go bhfuil uilleacha an $\triangle$ LMQ cómhionann le h-uilleacha an $\triangle$ OO_1P.

4) Ceathairshleasán cómhchiorcalach is ea ABCD, agus tagann na sleasa AB is DC le chéile in X. Faigh scáth na líne BC i gcómhroinnteoir na h-uilleann BXC, agus cruthuigh go bhfuil sé // le AD.

5) Pointí is ea X, Y, Z ar na sleasa BC, CA, AB sa triantán ABC. Tagann ~~an~~ ⊙ AYZ agus an ⊙ BZX le chéile arís in D. Cruthuigh gur pointí cómhchiorcalacha iad C, X, Y, D, ~~ionnus~~ ionnus go dtéigheann an ⊙ CXY tré D freisin.

(c) Lár ciorcail ísea P a thadhlas ⊙ áirithe (nó dronlíne áirithe) ag pointe shuite A	Dronlíne áirithe tré P [sonraí an tadhlaí] [~~teoirim~~]
Lár córda sóinseálaigh i gciorcal ísea P, a bhfuil buan-fhad sa gcórda	Ciorcal có-lárach a ghabhas tré lár chórda ar bith acu.

Cleachtaithe

1) Faigh rian lár na gciorcal a thadhlas dhá dronlíne.

2) Faigh rian lár na gciorcal go bhfuil ga seasmhach ~~acu~~ ionnta agus a thadhlas ciorcal áirithe.

3) Taispáin cé'n chaoi a línítear ~~dhá~~ chiorcal a bhfuil ga áirithe ionnta agus a thadhlas amuigh dá chiorcal a tugtar.

4) Tugtar dhá phointe A, B, agus dronlíne áirithe l. Aimsigh (i) pointe in l atá cómhfhada ó A agus B; (ii) pointe P in l, ionnas go mbeidh fairsinge áirithe sa Δ PAB.

5) Aimsigh lár an chiorcail a ghabhas tré phointe shuite A, agus a thadhlas dronlíne áirithe l ag pointe B a tugtar.

6) Tarraing ⊙ a thadhlas ⊙ áirithe ag pointe A a tugtar, agus a ghabhas tré phointe áirithe eile B.

7) Faigh rian an phointe shóinseálaigh P, má's eol go luigheann lár OP ar dhronlíne áirithe, áit gur pointe shuite é O a tugtar.

8) Ceangailtear pointe sóinseálach Q ar ⊙ áirithe, gurb é O a lár, le pointe shuite A. 'Sé P lár na dronlíne AQ. Cruthuigh go bhfuil fad sheasmhach idir P agus lár AO, agus d'á chionn sin faigh rian an phointe P.

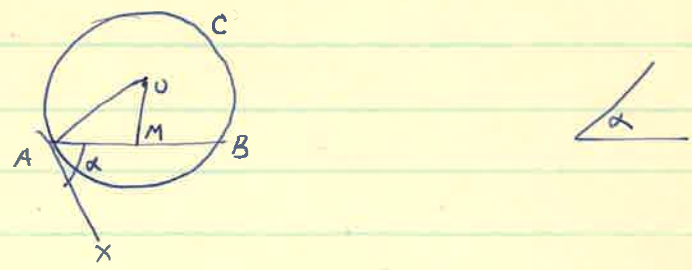
9) Tré phointe áirithe tarraing córda ciorcail a mbeidh fad áirithe ann.

10) Gearrann dhá chiorcal a chéile in P agus Q agus ~~bíodh~~ B rud O is O_1, lár na gciorcal. Córda dúbailte tré P ísea LPM. Ó phointe C, lár-phointe na líne OO_1, tarraingítear an t-ingear CZ ar LM.

Cruthuigh CP = CX áit gurb é X lár an chórda dhúbailte LPM agus d'á chionn sin faigh rian an phointe X.

c

Ceist 1   Teascán ciorcail a thógáil ar bhonn áirithe, agus uille an teascáin a bheith cóimhionann le h-uillinn áirithe.



Abair gurb é AB an bonn agus gurb í $\hat{\alpha}$ an uille a tugtar.

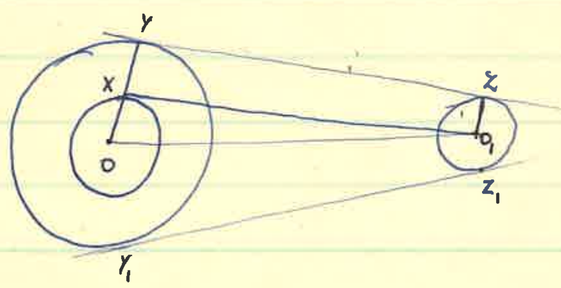
Réiteach

Tarraing an dronlíne AX a ghníos an uille $\hat{\alpha}$ le AB.
Tóg ingear ar AX ag A a ghearras ais shuimeitreachta AB in O.
Línigh an ⊙ fá n-ga OA ar lár dó O. 'Sé ACB an stuagh a fheileas.

Cruthúnas   De bhrí go bhfuil O ar a.s. na líne AB, tá OA = OB, agus gabhann an ⊙ tré B freisin.

Ó thárla $O\hat{A}X = 90^\circ$, tadhlaí isea AX, ionnus go bhfuil uille an teascáin ACB cóimhionann le $\hat{\alpha}$ (teoirim XXIV).

Ceist 2   Cómhthadhlaí a tharraint go dtí dhá chiorcal.



Abair gurb iad O, O_1 láir na gciorcal agus gatha dóibh R, r $(R > r)$.

Réiteach

Línigh an ⊙ ~~fá n~~ dárb ga $R-r$ gurb é O a lár, agus tarraing tadhlaí O_1X ón bpointe O_1 go dtí é.

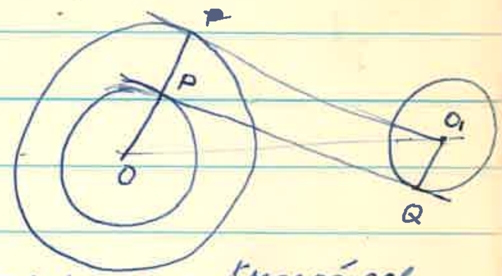
Sín OX go mbuailidh sé an imlíne in Y, agus tarraing O_1Z // le OY.

Cómhthadhlaí isea YZ.

Cruthúnas

Rinneadh $OX = OY - O_1Z$. ∴ Tá XY = agus // le O_1Z de réir tógála.
Fágann sin gur ▱ é $XYZO_1$ (teoirim XIII), agus de bhrí gur dronuille é $O\hat{X}O_1$, dronuilleóg isea é.
∴ Dronuilleacha isea $\hat{Y}$ agus $\hat{Z}$, ionnus go dtadhlann YZ an dá chiorcal.

Atora 1. Is léir gur cómhthadhlaí eile é Y_1Z_1, scáth na líne YZ in OO_1. Cómhthadhlaithe díreacha a tugtar ar YZ, agus Y_1Z_1.



Atora 2. Má 'sé R+r (in ionad R−r) ga an ⊙ a ghlinítear gur lár dó O, agus má leantar don réiteach thuas focal ar fhocal ina dhiaidh sin gheofar cómhthadhlaí eile PQ, d'a ngoirtear cómhthadhlaí trasnánach. Cómhthadhlaí trasnánach eile is ea scáth na líne PQ in OO_1.

Nóta. Ní bhíonn ceithre tadhlaithe ann i gcómhnaí. Má theagmhaíonn na ciorcail le chéile i ndá phointe dhifriúla, níl ach dhá chómhthadhlaí acu, de bhrí go bhfuil O_1 taobh istigh den ⊙ ar thagramar dó in atora 2.

Má thadhlann an dá ⊙ a chéile, tá trí cómhthadhlaithe acu má's tadhall amuigh é, ach níl thar cheann amháin má's tadhall istigh é.

Inchioreal agus Eischioreail Thriantáin

I dteoirim B (caib. III) is cómhfhada na h-ingir ó I ar shleasa an triantáin ABC, de bhrí gur scátha a chéile iad i gcóimhroinnteoirí na n-uilleann.

Tagann sin go dtadhlann trí sleasa an triantáin an ⊙ ar lár do I go bhfuil ga an ⊙ sin cothrom leis an ingear ó I ar shlios ar bith. Inchioreal an triantáin a tugtar ar an gciorcal sin. 'Sé I an t-inlár.

Mar an gcéanna tá ⊙ eile ann, ar lár dó I_1, a thadhlas an slios BC istigh agus a thadhlas an dá shlios eile amuigh. Eischioreal de thrí eischioreail an triantáin is ea é, agus 'sé I_1 an t-eislár atá ós cóir na h-uilleann A.

Cleachtaithe

1) Deimhnigh gur ar líne cheangail na lár a ghearras an dá chómhthadhlaí dhíreacha a chéile, agus gurb amhlaí don dá cheann eile é má's ann dóibh.

2) Tadhlann dhá ⊙ amuigh ag A, agus cómhthadhlaí díreach is ea XY. Má's in B a ghearras XY an cómhthadhlaí ag A, cruthuigh (i) go bhfuil $BA = BX = BY$, agus (ii) gur dronuille í $X\hat{A}Y$.

3) Trí phointe A tarraing an dronlíne go bhfuil fad an ingir uirthi ó phointe áirithe B cómhfhada le líne a tugtar.

4) Tarraing tadhlaí do chíoreal áirithe a bhéas // le dronlíne áirithe.

5) Tarraingítear dhá thadhlaí ag foirchinn láirlíne, agus gearrann siad mír AB ar thadhlaí ar bith eile. Cruthuigh go ngabhann AB dronuille ag lár an chíoreail.

6) Ceathairshleasán isea ABCD gur féidir ⊙ a inscríobhadh ann (i.e. tá ⊙ ann a thadhlas na sleasa uilig istigh). Cruthuigh $AB + CD = BC + AD$

7) ~~Ceathairshleasán~~ cruthuigh fá' cheathairshleasán chómhchíorcalach gur ar imlíne an chíoreail a bhuaileas cómhroinnteóir uilleann ar bith le cómhroinnteóir na h-uilleann ós a cóir amuigh.

8) Tarraing tadhlaí go dtí ⊙ ~~ionnus~~ g go mbeidh fad áirithe sa gcórda a ghearras ⊙ áirithe eile air.

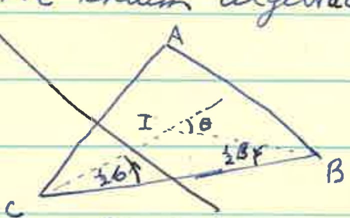
9) Tadhlann dhá chíoreal istigh ag A, agus córda cíoreail acu isea XY a thadhlas ~~i gcíoreal acu~~ an cíoreal eile ag B. Cruthuigh gurb í AB cómhroinnteóir na h-uilleann $X\hat{A}Y$.

10) Má 'se I inlár an $\triangle ABC$, cruthuigh $B\hat{I}C = 90° + \frac{1}{2}A$.

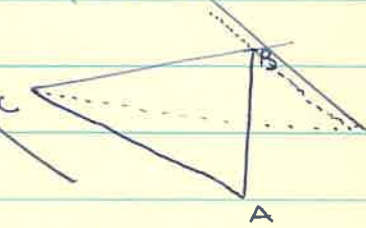
Faigh rian inlár thriantáin gurb eol a bhonn agus a stuacuille.

Teoirmí Bríse

Teoirim A   Is ionann dhá chasadh as éadan agus casadh singil tré shuim algébrach na n-uilleann (marab é zéro nó 360° an tsuim)



Fíoghair I



Ceisteanna Ilgnéitheacha

1) Sa bparallélogram ABCD, trasnán isea BD. Teagmhaíonn comhroinnteóirí na n-uilleann A agus C leis sna pointí X agus Y. Cruthuigh AX = agus // le CY.

2) Tóg rhombus a bhéas comhfhairsing le parallélogram a tugtar.

3) Má ghearann ◯ córdaí comhfhada ar thrí sleasa an triantáin, cá bhfuil an lár? Tarraing ciorcal ionnus go mbeidh na trí córdaí a ghearras sé ar shleasa an triantáin comhfhada le míolíne a tugtar duit.

4) I dtriantán ar bith ABC tarraingtear dhá chiorcail ar lárlínte dhóibh AB agus AC. Teaspáin go dteagmhaíonn siad le chéile arís ar an slios BC.

5) I dtriantán dronuilleach, cruthuigh go dtagann aisí simeitreachta na sliós le chéile ag lár an hipoteniúis.

6) Triantán i gciorcal isea ABC. Tarraingtear dronlíne parallélach leis an tadhaí ag A, agus gearrann sí AB, AC sna pointí X, Y. Cruthuigh go bhfuil na pointí X, Y, B, C comhchiorcalach.

7) Tagann dhá ◯ le chéile ag P agus Q. Ó phointe ar bith X ar chiorcal acu tarraingtear na línte XPA agus XQB a ghearras an ◯ eile sna pointí A agus B. Cruthuigh go bhfuil AB // leis an tadhlaí ag X.

8) Pointe isea X ar an slios AB sa ▱ ABCD. Tá dronlíne // le AB a ghearras na línte AD, XD, XC, BC sna pointí L, M, N, P. Cruthuigh go bhfuil fairsinge an ▱ ABPL = 2 △XDN.

9) Tadhlann dhá ◯ a chéile ag X agus córda dúbailte isea PXQ. Cruthuigh go bhfuil uille an teascáin ar XP i gciorcal acu cothrom leis an uillinn ar an teascán XQ sa gceann eile.

10) Tarraingtear tadhlaithe ó phointe shuite A go dtí fuireann de chiorcail chomhláracha. Faigh réan na bpointí tadhaill.

11. ~~[illegible]~~ I gceathairshleasán ar bith ABCD, má comhroinn-tear dhá uillinn chómhgharach C, D cruthuigh go bhfuil an uille idir na cómhroinnteóirí cothrom le leath-shuim A agus B.

Má comhroinntear na ceithre uilleacha, cruthuigh go ngeintear ceathairshleasán comhciorcalach leo.

12 Gearrann dhá líne ingearacha a chéile ag O. Pointí orthu isea X, Y. Má shleamhnaíonn X, Y orthu i gcaoi go bhfanann fad XY buan, faigh rian lár-phointe XY.

13 Tagann dhá chórda ciorcail le chéile ag pointe istigh. Cruthuigh gurb ionann an uille eatorra agus an uille ~~atá gabhtha~~ a ghabhas leath-shuim a stuadh ag an imlíne.

Má's amuigh a ghearras siad a chéile, cruthuigh nach mór leath na difríochta a rá in áit leath na suime.

14 Pointe isea P ar an trasnán BD sa □ ABCD. Cruthuigh Δ ABP = Δ BCP i bhfairsinge.

15 Gluaiseann pointe P i gcaoi ~~go~~ gur buan don uillinn idir an dhá thadhlaí ó P go dtí ciorcal áirithe. Faigh rian P.

16 Sé O iomlár an Δ ABC agus sé X lár an t-sleasa AB. Cruthuigh $A\hat{O}X = \hat{C}$.

Má ~~tá~~ 'sé AD an t-ingear ar BC, cruthuigh go bhfuil $O\hat{A}D$ = ~~leath na difríochta~~ an difríocht idir $\hat{B}$ agus $\hat{C}$.

17 Sa gceathairshleasán ABCD, 'sé O lár an trasnáin BD agus pointe in BC isea X ionnas go bhfuil OX ∥ AC. Cruthuigh go gcomhroinneann AX an 4-shleasán.

18 Tagann dhá ⊙ le chéile in X, Y agus córda díbhaille isea AXB. Gearrann na tadhlaithe ag A agus B a chéile ag C. Cruthuigh CAYB comhchiorcalach.

19 Sa Δ ABC, 'siad X, Y, Z lár na sleasa BC, CA, AB agus D sé AD an t-ingear ó A ar BC. Cruthuigh (i) gur scátha a chéile in YZ iad na Δ YZA agus YZD; (ii) go bhfuil $Y\hat{X}Z = Y\hat{D}Z$; (iii) go ngabhann an $\odot$ XYZ trí D.

20 ✓ Ceathairshleasán é ABCD go dtagann AB agus DC le chéile in X, agus go dtagann DA, CB le chéile in Y. Teagmhaíonn na $\odot$ XBC agus YAB le chéile in B agus i bpointe eile Z.
Cruthuigh (i) $Y\hat{Z}B = \hat{A}$, $B\hat{Z}C = A\hat{X}D$ (ii) go ngabhann an $\odot$ YDC trí Z; (iii) mar an gcéanna go ngabhann an $\odot$ ADX trí Z.
Sé sin le rá, maidir leis na ceithre triantáin a gheintear le ceithre dronlíne ar bith, tá pointe áirithe ar cheithre imchiorcail na dtriantán sin.

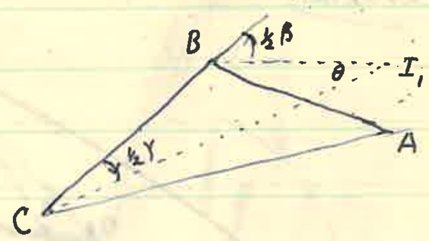
21 ✓ Má tharlaíonn i gceist 20 gur ceathairshleasán comhchiorcalach é ABCD, teaspáin go bhfuil X, Z, Y in aon dronlíne amháin.

Teoirmí Breise

Teoirim A

Is ionann dhá chasadh as éadan agus casadh singil tré shuim algébrach na n-uilleann (murab í zéro nó 360° an t-suim)

Fíogh I



Fíogh II

Hipotesis

Castar an plána timpeall B agus C as éadan tré na h-uilleacha $\hat{\beta}$ is $\hat{\gamma}$.
[I bhFíogh I tá $\hat{\beta}$ agus $\hat{\gamma}$ deimhneach; i bhFíogh II tá β deimhneach ach tá γ diúltach]

Tógáil Tarraing an líne BA a leagtar fan BC de bharr an chasta timpeall B, agus an líne CA go leagtar CB uirthi sa gcasadh eile.
Abair gurb iad BI, CI comhroinnteóirí na n-uilleann $\hat{\beta}$ is $\hat{\gamma}$.
Is ionann an dá chasadh agus casadh singil timpeall I.

Cruthúnas

Is ionann an casadh timpeall B agus dhá scáthú sna línte BI agus BC as a chéile [Teoirim A, Caib III]

Mar an gcéanna is ionann an casadh timpeall C agus dhá scáthú sna línte CB agus CI as ~~a chéile~~ éadan.

~~Má chuirtear le chéile ga~~ Ag cur na scáthuithe sin le chéile dúinn, ní miste neamh-shuim a dhéanamh den dá scáthú in BC as éadan, agus fágtar dhá scáthú in BI agus CI gurb ionann le chéile iad agus casadh timpeall I tré n uillinn 2θ

Ach, de thairbhe teoirme , tá $2\theta = \hat{\beta} + \hat{\gamma}$ (Fíogh I), nó $2\theta = \hat{\beta} - \hat{\gamma}$ (Fíogh II)

Q.E.D

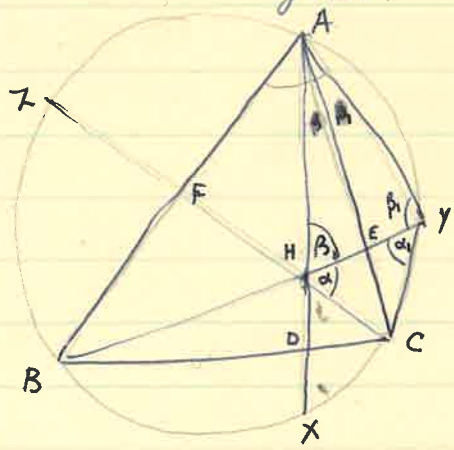
1) Má's pointí iad X, Y ar dhá dhronlíne // $\underline{l}$ agus $\underline{m}$, ionnus go bhfuil $XY \perp$ le $\underline{l}$, teaspáin gurb ionann dhá scáthú in $\underline{l}$ agus $\underline{m}$ agus aistriú fan XY tré 2XY.

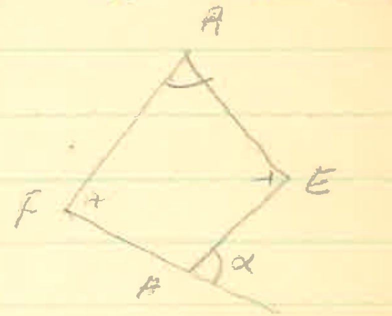
2) Má's zéro (nó 360°) suim na n-uilleann $\hat{\beta}$ is $\hat{\gamma}$ sa teoirim, cruthuigh gurb ionann agus aistriú áirithe an dá scáthú.

3) Síntear sleasa triantáin ABC, agus castar an plána timpeall A, B, C as éadan tré na h-uilleacha deimhneacha amuigh.
Teaspáin gurb ionann í sin agus aistriú fan na líne CA ina gcuirtear gach pointe an fhad AB+BC+CA de.

Teoirim B

I dtriantán ar bith línte comhreathacha isea na h-ingir ó na reanna ar na sleasa ós a gcóir.





if H outside ABC ?

Hipotesis

Is í bpointe H a thagann na h-ingir BE is CF ar na sleasa AC, AB le chéile.

Tátall

'Sé AH an t-ingear ó A ar BC. go Dtí X, Y, Z.

Tógáil Línigh iomchiorcal an Δ, agus sín AH, BH, CH, ~~ceangail AY,~~ CY.

Cruthúnas

Ó's dronuilleacha iad $\hat{E}$ agus $\hat{F}$, pointí comhchiorcalacha isea A, F, H, E, ionnus go bhfuil $\hat{\alpha} = B\hat{A}C$ (teoirim XXI)

Ach tá $B\hat{A}C = \hat{\alpha}_1$, atá ar aon stuaigh leis. $\therefore$ Tá $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}_1$.

$\therefore$ Triantán comhchosach isea CHY, agus ó thárla CE $\perp$ le HY, scátha a chéile in AC isea H agus Y.

Fágann sin $\hat{\beta} = \hat{\beta}_1$ ~~= Ĉ, ionnus go bhfuil~~ atá ar aon stuaigh amháin le $\hat{C}$.

De thairbhe $\hat{\beta} = \hat{C}$, 4-shleasán comhchiorcalach isea HECD, agus ó's dronuille $\hat{E}$ (hipotesis), dronuille eile isea $\hat{D}$ (teoirim XXI)

Q.E.D.

Teárma Ingearlár an Δ a tugtar ar H; 'sé DEF triantán bhun na n-ingear.

Atora 1 'Siad X, Y, Z scátha an phointe H sna sleasa BC, CA, AB.

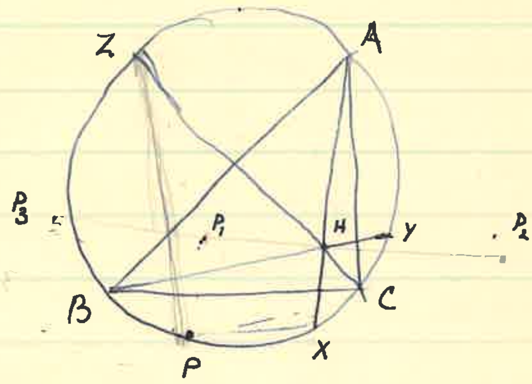
Atora 2 'Siad A, B, C láir na stuagh YZ, ZX agus XY mar tá $Z\hat{C}A = Y\hat{C}A$ (scátha a chéile in AC), etc.

Atora 3 Ó thárla HD = DX, HE = EY, HF = FZ, tá sleasa an Δ DEF $\parallel$ le sleasa an Δ XYZ.

'Sé H inlár an Δ DEF, agus 'siad A, B, C na h-eislár.

Teoirim C

Trí pointí in aon dronlíne amháin ~~iseadh~~ scátha pointe ar imlíne chiorcail i sleasa thriantáin inscríobhtha.



Hipotesis

'Siad P_1, P_2, P_3 scátha P sna sleasa BC, CA, AB.

Tátall

Luigheann P_3 (agus P_2) ar líne cheangail H agus P_1.

Cruthúnas

'Sé B lár an ~~straight~~ ~~XH~~ ZX, agus ó thárla $X\hat{B}C = C\hat{B}H$, $Z\hat{B}A = A\hat{B}H$, (teoirim A), tá $X\hat{B}Z = 2\hat{B}$. $= X\hat{P}Z$ $X \to Z$

$\therefore$ buirtear XP fan ZP de bharr chasta tré'n uillinn $2\hat{B}$ timpeall B, gurb ionann é agus dhá scathú in BC is BA as a chéile (caib III).

'Sé HP_1 scáth na líne XP in BC, agus fágann sin gur scátha a chéile iad na línte HP_1 agus ZP sa slios AB.

$\therefore$ Tá P_3, scáth P in AB ar an líne HP_1, agus mar an gcéanna tá P_2 uirthi freisin. $[\,P \in ZP \Leftrightarrow P_3 \in HP_1\,]$

Q.E.D.

Atora 1 Pointí cómhlíneacha ~~iseadh~~ ~~bun~~ bun na n-ingear a tarraingítear ar shleasa thriantáin ó phointe ar bith ar an iomchioreal.

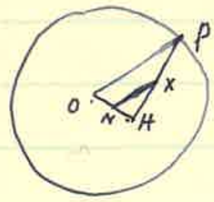
Mar 'siad láir na línte PP_1, PP_2, PP_3 na trí ~~bun~~ bun sin, ~~conffs~~ a go luigheann siad ar an dhronlíne tré lár PH atá // le $P_1P_2P_3H$.

Troighlíne P a tugtar ar an líne úd.

Atora 2 Má scáithtear i sleasa thriantáin dronlíne ar bith tré'n ingearlár, is trí dronlínte cómhreathacha a ~~gheintear~~ gheintear, agus tagann siad le chéile ar an iomchioreal.

Teoirim D   Ciorcal Naoi bPointe an Triantáin

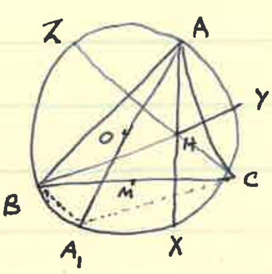
Lemma Má ceangailtear pointe socair H le pointe súinseálach P ar imlíne chiorcail, luigheann lár ~~na~~ líne ceangail ar chiorcal áirithe.



Má 'sé X lár HP agus má 'sé N lár HO, is léir go bhfuil $NX = \frac{1}{2} OP$. Athraíonn X d'á réir i gcaoi go bhfuil fad áirithe idir é agus pointe socair N. ~~Fágann~~

Fágann sin gur ciorcal é (ar lár dó N) lorg an phointe X.

Teoirim D I dtriantán ar bith, gabhann ciorcal tré na naoi bpointí seo; lár na slios, bun na n-ingear ó na reanna ar na sleasa, agus lár-phointí na línte a cheanglaíos an t-ingearlár agus ~~na~~ reanna an triantáin.



Tógáil Tarraing AOA_1 an láirlíne tré A. Ceangail A_1B, A_1C.

Cruthúnas

Ó's láirlíne í AA_1, dronuille is ea A_1BA, agus fágann sin go bhfuil $A_1B \parallel$ le CH, mar táid $\perp$ le AB.

Mar an gcéanna tá $A_1C \parallel$ le BH, ionnas gur ▱ é $BHCA_1$.

$\therefore$ Tá lár an t-sleasa BC leathbhealaigh idir H agus A_1.

Is léir anois go gcomhroinneann na naoi bpointí a luaitear sa teoirim naoi línte áirithe ó H go dtí an imlíne, ionnas go luigheann siad féin ar chiorcal ~~ar lár dó~~ dárb ga $\frac{1}{2} OA$, go bhfuil a lár leath-bhealaigh idir H agus O.

Ciorcal naoi bpointe an triantáin a tugtar ar an gciorcal sin.

Atora Ó tharla $A_1O = OA$ agus $A_1M = MH$, tá $OM = \frac{1}{2} AH$. -

Cleachtaithe

1) Má 'sé H ingearlár an Δ ABC, deimhnigh gur ingearlár é gach pointe de na ceithre cinn A, B, C, H, sa triantán a' reanna dhó na trí pointe eile.

Teaspáin gurb é an t-aon chioreal amháin é cioreail naoi bpointe na dtriantán ABC, HAB, HBC, HAB.

2) Sa Δ ABC 'sé I an t-inlár agus 'siad I_1, I_2, I_3 na h-eislár. Cruthuigh gur triantán agus a ingearlár a dhealbhionn na pointí I, I_1, I_2, I_3.

3) Má 'sé X lár na líne II_1, teaspáin go bhfuil X ar an gcioreal ABC, agus cruthuigh $XI = XB = XC$.

Deimhnigh freisin gurb é X lár an stuaigh BC thíos, agus gurb é lár-phointe $I_2 I_3$ lár an stuaigh BC thuas.

4) Cruthuigh gurb iad $180° - 2A$, $180° - 2B$, $180° - 2C$ uilleacha thriantáin bhun na n-ingear.

5) Faigh an uille a ghabhas an slios BC ag an ingearlár H.
Aimsigh rian H nuair is eol bonn agus stuacuille an triantáin. Sa gcás céanna faigh rian lár chioreail na naoi bpointe.

6) Tadhlann an slios BC inchioreal an triantáin ag P, agus is ag Q a thadhlas sé an t-eischioreal atá ós cóir A.

Cruthuigh (i) $2BP = AB + BC - CA$; (ii) $2BQ = BC + CA - AB$.

7) Tarraingtear na tadhlaithe ag A, B, C d'iomchioreal an Δ ABC. Teaspáin go ngeintear Δ leo gurb ionann a uilleacha agus uilleacha thriantáin bhun na n-ingear.

8) Triantán a thógáil gurb eol ionaid na dtrí n-eislár ann.

9) Pointe ar iomchioreal an Δ ABC is ea P, agus is i bpointe Q a ghearras an t-ingear ó P ar BC an chioreal ABC arís. 'Sé X scáth an ingearláir in BC.

Cruthuigh (i) gur scátha a chéile iad AQ agus XP in ais shuimeitreachta AX: (ii) go bhfuil AQ // le HP_1, agus le troighlíne an phointe P: (iii) go bhfuil lár AP_1 ar chioreal na naoi bpointe.

10) Má 's foirchinn láirlíne iad P, R sa gcioreal ABC cruthuigh go bhfuil troighlínte na bpointe sin de réir an Δ ABC ingearach le chéile, agus go ngearrann siad ar chioreal na naoi bpointe
[Ride: na línte trí A atá // leo a bhreithniú i dtosach]

11) Maidir leis na ceithre triantáin a geintear le ceithre dronlínte ar bith, agus an pointe O ina dtagann a n-iomchioreail le chéile (féic leath.— cruthuigh:—
(1) gur pointe é O go bhfuil a scátha sna ceithre dronlínte cóimhlíneach;
(2) go luigheann ingearláir na gceithre dtriantán san dronlíne sin;
(3) gur dronlíne í an líne cheangail go bhfuil a scátha sna ceithre dronlínte comhreathach.

12) Pointe taobh istigh a dtriantáin ABC is ea P. Siad L, M, N lár na slios BC, CA, AB, agus siad X, Y, Z lár na línte PA, PB, PC. Tagann na ⊙ NXY agus LYZ le chéile in Y agus i bpointe eile K, abair.

Cruthuigh (i) $N\hat{K}Y = A\hat{B}P$, $Y\hat{K}L = P\hat{B}C$; (ii) go ngabhann an ⊙ NLM tré K freisin (iii) mar an gcéanna go ngabhann an ⊙ MZX tríd.

'Sé sin, maidir leis na ceithre triantáin a gintear ó cheithre phointe ar bith, tá pointe amháin ar chiorcail naoi bpointe na gceithre triantán sin, san am chéanna.