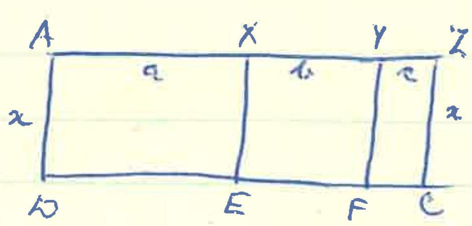
Caibidil VIII

Toradh Dhá Dhronlíne

Má tá fad a agus b in dhá dhronlíne áirithe, is follasach cén chaoi a n-aimsítear dronlíne eile a mbeidh fad $a+b$ inti (nó fad $a-b$ nuair atá $a > b$).

Má's maith linn toradh dhá dhronlíne a bhreacadh ar bhealach geométrach, níl aon chaoi is túisce a chuimhneos an léitheoir uirthi ná fairsinge na dronuilleoige a gintear ón dá líne sin a tharraingt chuige. Níor mhór a bheith cinnte áfach go dtagann an "toradh" seo le rialacha an mhéadaithe de réir Algébair; e.g. go mbeadh $x(a+b+c) = xa+xb+xc$. Is furasta a thaispeáint go bhfuil sé sin amhlaidh.



Tarraing ar dhronlíne ar bith na míreanna AX, XY, YZ atá a, b, c ar fad. Tarraing ingear ag A a bhfuil fad x ann, agus slánaigh na dronuilleoga AZCD etc.

De bhrí go bhfuil an dron. AZCD cothrom leis na trí dronuilleoga AXED, XYFE, YZCF le chéile, tá

$$x(a+b+c) = xa + xb + xc.$$

Nóta 1 'Sé AP.PB a scríobhtar chun fairsinge na dronuilleoige ar sleasa dhi AP agus PB a chomharthú. Ciallaíonn AP^2 an chearnóg AP.AP.

Nóta 2 Is léir ón dronuilleoig ar sleasa dhi $a+b$ agus $c+d$, go bhfuil $(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$.
e.g. nuair $a=c$, $b=d$, tá $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$.
$\therefore$ Sa bhFíog. thuas tá $AY^2 = (AX+XY)^2 = AX^2+2AX.XY+XY^2$.

De bhrí go dtagann toradh dhá dhronlíne le gnáth-rialacha Algébair, is féidir teoirmí geométracha a ghnóthú le modh algébrach

E.G. (a) Má's istigh a roinneann P an dronlíne AB ar lár di O,
agus má tá $AO = a$, $OP = x$, tá ~~is soiléir go bhfuil~~

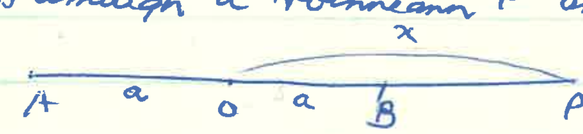
$$AP = a + x \quad ; \quad PB = a - x.$$

Is soiléir anois de réir algébair go bhfuil,

$$\text{I} \qquad AP - PB = 2OP$$
$$\text{II} \qquad AP.PB = AO^2 - OP^2$$
$$\text{III} \qquad AP^2 + PB^2 = 2AO^2 + 2OP^2$$

Is minic a bainfear feidhm as na teoirmí sin.

(b) Má's amuigh a roinneann P an líne AB, agus



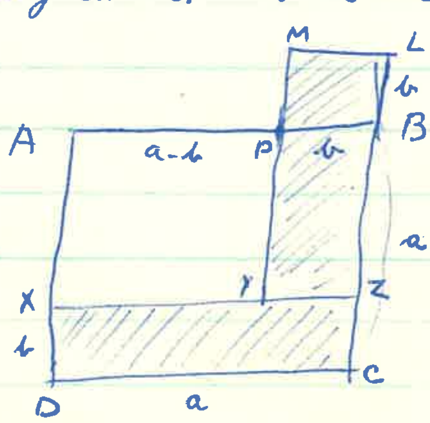
má cuirtear $AO = a$, $OP = x$ arís, faightear $AP = x + a$,
$PB = x - a$.

$$\therefore \quad \text{I}' \qquad AP + PB = 2OP$$
$$\text{II}' \qquad AP.PB = OP^2 - OA^2$$
$$\text{III}' \qquad AP^2 + PB^2 = 2OP^2 + 2OA^2.$$

Ar an taobh eile de is féidir teoirmí algébracha áirithe a léiriú de réir geoméatrachta.

Sompla 1.

Breacadh geoméitreach na teoirme $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ a thabhairt.



Tógáil

Bíodh $AB = a$, $PB = b$, ionnus go bhfuil $AP = a - b$. Tóg cearnóga $ABCD$, $PBLM$ ar AB agus PB. Déan $XD = PB = b$, agus tarraing $XZ \parallel AB$.

Cruthúnas

Ó tharla $BL = CZ = b$, tá $ZL = BC = a$.

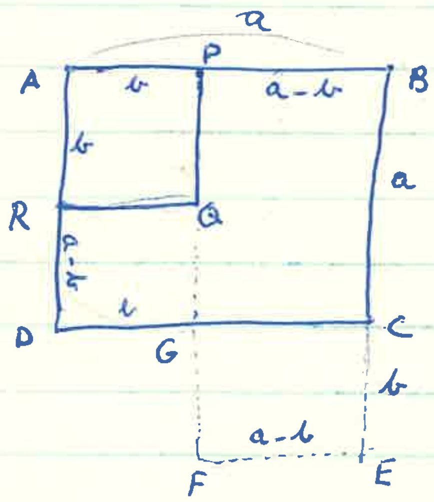
$\therefore$ Is ionann leabh gach dronuilleog $MLZY$, agus $XZCD$.

De bhrí go bhfuil $AX = a - b = AP$, ceanóg ísea $APYX$ gurb ionann é agus $(a-b)^2$

Ach tá an cheanóg AB + an cheanóg MB
$= $ an cheanóg $AY + 2ab$.

$\therefore\ a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$, nó $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

<u>Sompla 2</u> Breacadh geoméitreach na teoirme $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ a thabhairt.



<u>Tógáil</u>

Tóg na ceanóga AC, AQ ar $AB = a$, $AP = b$. Déan $CE = b$ agus slánúigh an dronuilleog $PBEF$.

<u>Cruthúnas</u>

De bhrí go bhfuil $RD = a - b = GC$, agus go bhfuil $DG = b = CE$, is ionann an dá dron. RG agus GE.

~~Ach~~ Fágann sin go bhfuil an dron. PE = an dron. PC + an dron. RG

Ach tá an dron. PC + an dron. $PG = AB^2 - AP^2$

$\therefore$ Tá an dron. $PE = AB^2 - AP^2$, nó $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

~~Ceisteanna~~

(1) Teaspáin le fíoghair go bhfuil an cheanóg ar dhronlíne níos mó nó faoi cheathair ná an cheanóg ar leath na líne.

(2) Tabhair breacadh geoméitreach i gcóir:—

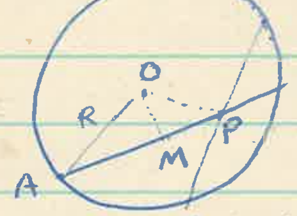
(i) $a(a-b) = a^2 - ab$

(ii) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Teoirim I

Má ghabhann córdaí ciorcail tré'n bhpointe céanna, is ~~…~~ buan-fhairsinge ~~san~~ an dronuilleog fá mhíreanna gach córda.

Cás I. Nuair is istigh a ghearras na córdaí.



b'fhearr "r" nó "a" nó "g"

Abair gur córda ar bith é AB tré'n bhpointe socair P, sa gciorcal ar lár dó O agus ar ga dó R.

Tarraing an t-ingear OM ar AB, a chomhroinneas é.

Teaspáinfear go bhfuil $AP.PB = R^2 - OP^2$.

Cruthúnas

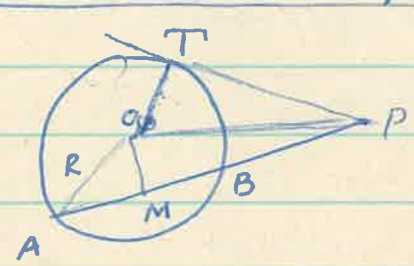
Ó tharla $AM = MB$, tá $AP.PB = (AM+MP)(AM-MP)$ $= AM^2 - MP^2$

Is ionann é sin agus $(AM^2+MO^2) - (MP^2+MO^2) = R^2 - OP^2$.

$\therefore AP.PB = R^2 - OP^2$.

Baineann $R^2 - OP^2$ leis an bhpointe P, ach tá sé neamhspleách den chórda ar leith a tarraingítear tré P, ionnus go bhfuil an fhairsinge bhuan $R^2 - OP^2$ san dronuilleog fá mhíreanna gach córda.

Cás II. Nuair a ghabhas na córdaí tré fhointe P amuigh.



Teaspáinfear go bhfuil $PA.PB = OP^2 - R^2$.

Cruthúnas

Tá $PA.PB = (PM+MA)(PM-MA) = PM^2 - MA^2$.

Is ionann é sin agus $(PM^2+OM^2) - (MA^2+OM^2) = OP^2 - R^2$.

$\therefore$ Tá an dronuilleog fá mhíreanna gach córda $= OP^2 - R^2$

Atoradh 1 I gcás II, má's é PT an tadhlaí ag T, is soiléir ó'n triantán dronuilleach OTP go bhfuil

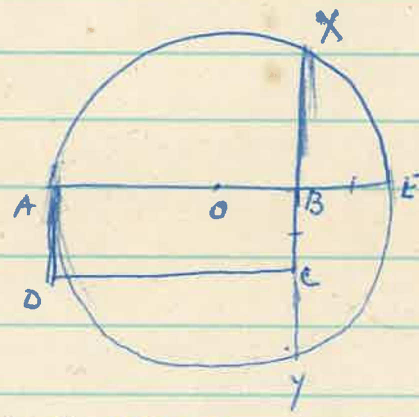
$$PT^2 = OP^2 - R^2 = PA.PB.$$

Atora 2   Má's dronlíne í PT a tarraingítear go dtí ⊙ ó phointe P amuigh, iongnas go bhfuil $PT^2 = PA.PB$ áit gur corda ar bith tré P é AB, tadhlann PT an ⊙ sin ag T.

Mar sa Δ OTP tugtar $PT^2 = OP^2 - OT^2 \therefore OT^2 + PT^2 = OP^2$, iongnas gur dronuillé í $O\hat{T}P$, agus dá bhrí sin tadhlaí is ea TP.

Nóta   De thairbhe teoirme I is féidir an cheist seo a réiteach.

Ceist 1   Cearnóg a tharraingt a bheas comhfhairsing le dronuilleoig áirithe.



Abair gurb é ABCD an dronuilleog a tugtar.

Réiteach

Sín AB go dtí E chun go mbeidh $BE = BC$. Tarraing ⊙ ar an láirlíne AE, agus sín BC go dtéigh... sé leis an gciorcal in X agus Y. 'Sé an chearnóg ar BX an chearnóg a fheileas.

Cruthúnas

De thairbhe teoirme I tá $AB.BE = BX.BY = BX^2$, mar tá $BX = BY$ de bhrí go bhfuil $XY \perp$ leis an láirlíne AE.

Ach rinneadh $BE = BC$.

$\therefore$ Tá an dron. $ABCD = BX^2$

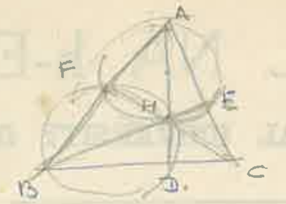
Ceisteanna

1) Is dronuillé í A sa Δ ABC agus 'sé AD an t-ingear ar BC cruthuigh (a) $BD.DC = AD^2$ (b) go dtadhlann AC an ciorcal ADB ag A agus dá chionn sin go bhfuil $BC.CD = AC^2$

2) I dtriantán ar bith ABC pointe in BC is ea X iongnas go bhfuil $X\hat{A}C = ABC$ cruthuigh $BC.CX = AC^2$.

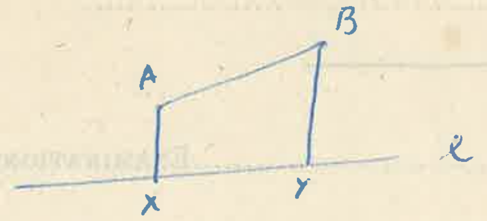
3) Tarraing cearnóg a bheas comhfhairsing le triantán áirithe.

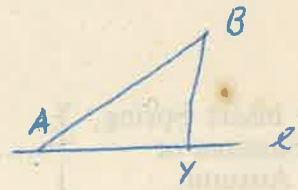
4) I dtriantán ar bith ABC ~~Aaaa~~ 'sé AD an t-ingear ó A ar BC, agus 'sé BE an t-ingear ó B ar AC. Cruthuigh $BC.CD = AC.CE$.



$CD.CB = CH.CF = CE.CA$

Téarma



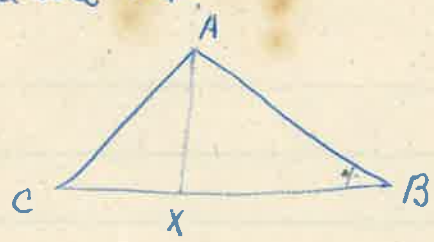


Má's iad X, Y bun na n-ingear ó A agus B ar dhronlíne l, 'sé XY leagan na dronlíne AB ar l. Má thárlaíonn go bhfuil A ar l, 'sé AY leagan AB ar l.

Teoirim II

~~Má's géaruille ~~é ar uille~~ a ghabhas slios i dtriantán, tá an chearnóg ar an slios sin agus suim na gcearnóg ar an dá shlios eile minus dúbailt na dronuilleoige~~ is ionann

Má's géaruille a ghabhas slios i dtriantán, is ionann an chearnóg ar an slios sin agus suim na gcearnóg ar an dá shlios a chrioslaíonn an ghéaruille minus dúbailt na dronuilleoige fá shlios acu agus leagan an tsleasa eile air.



Abair gur géaruille é $\hat{B}$ san triantán ABC, agus go bhfuil $AX \perp BC$. Tá le cruthú go bhfuil $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2CB.BX$.

Cruthúnas

Ó'n dtriantán dronuilleach CXA faightear $AX^2 = AC^2 - CX^2$, agus mar an gcéanna tá $AX^2 = AB^2 - BX^2$. Scríobh $CB - BX$ in áit CX.

$$\therefore \quad AC^2 - (CB - BX)^2 = AB^2 - BX^2.$$

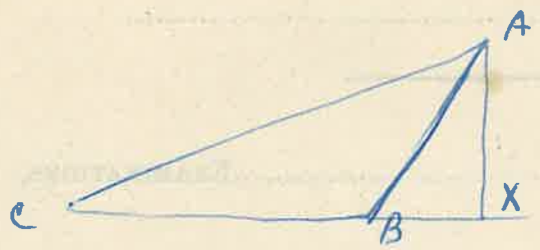
$$\therefore \quad AC^2 - CB^2 + 2CB.BX - BX^2 = AB^2 - BX^2$$

Fágann sin $AC^2 - CB^2 + 2CB.BX = AB^2$, nó $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2CB.BX$

Q.E.D.

Nóta [Féach Teoirim XVII Caib. V nóta]

Teoirim III   Má's maoluillé a ghabhas slios i dtriantán, is ionann an chearnóg ar an slios sin agus suim na gcearnóg ar an dá shlios a chrioslaíonn an mhaoluillé plus dúbailt na dronuilleoige fá shlios acu agus teagan an t-sleasa eile air.



Abair gur maoluillé í $\hat{B}$ sa triantán ABC, agus go bhfuil $AX \perp BC$.
Tá le cruthú go bhfuil $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2\,BC.BX$.

Cruthúnas

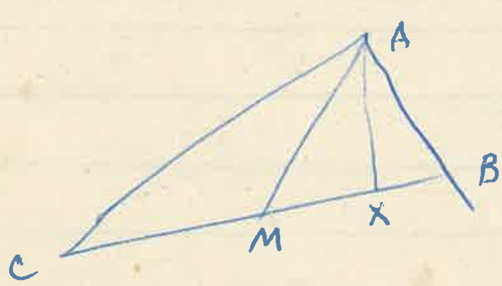
Ó'n dtriantán dronuilleach AXC tá $AX^2 = AC^2 - CX^2$, agus mar an gcéanna tá $AX^2 = AB^2 - BX^2$. Scríobh $BC+BX$ in áit CX.

$\therefore \quad AC^2 - (BC+BX)^2 = AB^2 - BX^2$.

$\therefore \quad AC^2 - BC^2 - 2BC.BX - BX^2 = AB^2 - BX^2$.

Fágann sin $AC^2 - BC^2 - 2BC.BX = AB^2$, nó $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC.BX$.

Teoirim IV   Is ionann suim na gcearnóg ar dhá shlios triantáin agus dúbailt na cearnóige ar leath an tríú shleasa máille le dúbailt na cearnóige ar an meánlíne a chomhroinneas an tríú slios.



Sa Δ ABC abair gur meánlíne í AM (i.e. $BM = MC$), agus go bhfuil $AX \perp BC$.
Tá le cruthú go bhfuil $AB^2 + AC^2 = 2MC^2 + 2AM^2$.

Cruthúnas

Maran Δ comhchosach é ABC géaruillé isea uille amháin den dá uillinn fhorlíontacha $A\hat{M}C$, $A\hat{M}B$, agus maoluillé isea an uille eile.

Sa Δ maoluilleach AMC, tá $AC^2 = AM^2 + MC^2 + 2CM.MX$ (Teoirim III)

Sa Δ géaruilleach AMB, tá $AB^2 = AM^2 + MB^2 - 2BM.MX$ (Teoirim II)

Ach tuigtar $MC = MB$.

$\therefore$ Le suimiú faightear $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2MC^2$.

Ceisteanna

1) Sa triantán ABC, tá $AC^2 = AB^2 + BC^2 + AB.BC$; cruthaigh go bhfuil $\hat{B} = 120°$.

2) I dtriantán ar bith ABC deimhnigh ~~go bhfuil~~ gurb ionann na dron-uilleoga AB fá leagan BC ar AB, agus BC fá leagan AB ar BC.

3) ~~I gceathairshleasán~~ Taispeáin gurb ionann suim na gcearnóg ar shleasa pharalléilograim agus suim na gcearnóg ar an dá thrasnán.

4) I dtriantán ar bith is ionann suim na gcearnóg ar na sleasa fá thrí agus suim na gcearnóg ar na meánlínte fá cheathair.

5) I gceathairshleasán ar bith ABCD 'siad X, Y láir na dtrasnán AC agus BD. Cruthaigh $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4XY^2$.

6) Dá bhrí gur córda é CX sa gciorcal ar an láirlíne AC (Teoirim IV), cruthaigh $CM.MX = \frac{1}{4}(AC^2 - CB^2)$

7) Sa triantán ABC tá $AB = AC$ agus ~~pointe in~~ síntear AB go dtí D ionas go bhfuil $AB = BD$. Cruthaigh $CD^2 = AB^2 + 2BC^2$.

8) Teagmhaíonn dhá chiorcal le chéile in A agus B, agus pointe ar bith ar shíneadh AB isea P. Taispeáin gur cómhfhada na tadhlaithe a tarraingítear ó P go dtí an dá chiorcal.

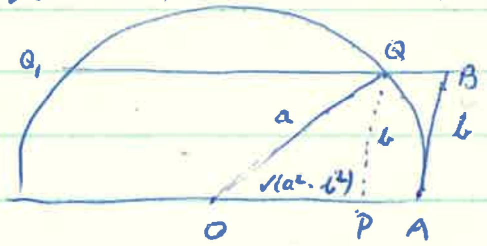
9) Faigh rian an phointe P a ghluaiseas i gcaoi go bhfuil $AP^2 + PB^2$ buan, áit gur pointí socra iad A agus B.

10) Sa triantán ABC pointe in BC isea K ionas go bhfuil $mKC = nBK$ áit gur uimhreacha iad m, n.
Cruthaigh $mAB^2 + nAC^2 = (m+n)AK^2 + mBK^2 + nKC^2$.

An Chudromóid Chearnach san Geoméitreacht

Nuair tugtar dhá mhírlíne atá a agus b ar fad, is furasta an líne $\sqrt{(a^2+b^2)}$ a thógáil de thairbhe theoirme ~~Pythagoras~~ Phítagorais.

Is féidir $\sqrt{(a^2-b^2)}$ a aimsiú mar seo a leanas, nuair $a > b$.



Tarraing O ar gá dó $OA = a$, agus ar an ingear ag A déan $AB = b$. Abair go ngearrann an pharailéil tré B an O in Q, agus gurb é QP an t-ingear ar OA.

De bhrí go bhfuil $OQ = a$, $PQ = b$, $O\hat{P}Q = 90^\circ$, tá $OP^2 = a^2 - b^2$.

Nóta Má déantar leithchiorcal ar OA agus má's córda é AX san gciorcal a bhfuil fad b ann, feicfear go bhfuil $OX^2 = a^2 - b^2$.

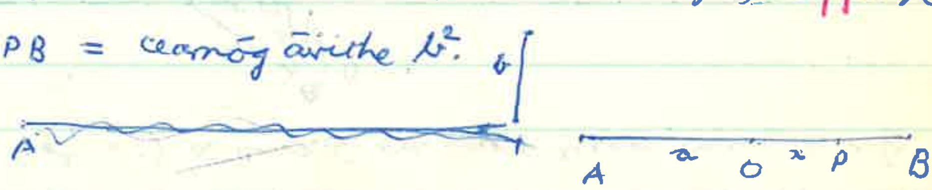
An Chudromóid Chearnach

Is ionann le chéile $x^2 + 2ax - b^2 = 0$ agus $(x+a)^2 = a^2 + b^2$, ionas go gcuntear dhá réiteach na chudromóide de réir $x + a = \pm\sqrt{(a^2+b^2)}$.

Mar an gcéanna, is ionann $x^2 - 2ax + b^2 = 0$ agus $(x-a)^2 = a^2 - b^2$, agus ~~siad~~ is iad $x = a \pm \sqrt{(a^2-b^2)}$ na réiteacha, áit a bhfuil $a > b$.

Is iomdha ceist san geoméitreacht gurb ionann í agus cudromóid chearnach a réiteach, agus cé gur gnáthach an obair a choiriú i gcomharthaíocht geoméitreach is í an obair chéanna í agus réiteach algébrach na cudromóide. Is maith ann an léide nach féidir an cheist a réiteach d'uireasa na líne $\sqrt{(a^2+b^2)}$ nó $\sqrt{(a^2-b^2)}$ de réir na cudromóide a bhfuil gnótha againn leithi.

Sompla 1 Dronlíne AB a roinnt i bpointe P istigh, ionas go mbeidh $AP.PB$ = cearnóg áirithe b^2.



Réiteach Faigh O lár AB. Má's é P an pointe atá á lorg bíodh $OA = OB = a$, $OP = x$. Fágann sin $AP = a+x$; $PB = a-x$.

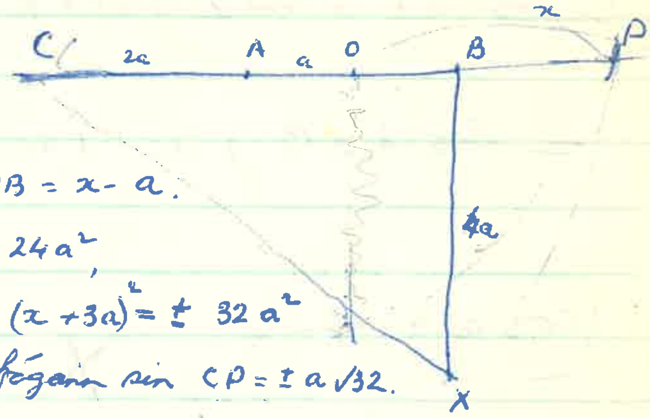
$\therefore$ caithfidh $(a+x)(a-x) = b^2$ $\therefore$ $x^2 = a^2 - b^2$ nó $x = \pm\sqrt{(a^2-b^2)}$

Míníteár thuas cé'n chaoi a n-aimsítear an líne $\sqrt{(a^2-b^2)}$ agus cuirtear ionad P d'á réir.

Is léir gur réiteach eile é P_1, (scáth P in O); is don fhréamh eile $x = -\sqrt{(a^2-b^2)}$ a fhreagraíos seisean.

Sompla 2 Roinn an dronlíne AB i bpointe P amuigh i gcaoi go mbeidh
$2AP^2 - PB^2 = 6AB^2$

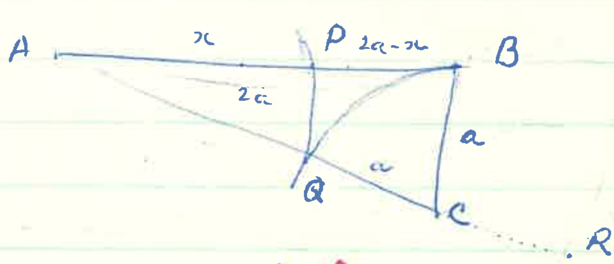
Réiteach



Bíodh $AO = OB = a$, $OP = x$
ionnas go bhfuil $AP = x + a$, $PB = x - a$.
Tugtar $2(x+a)^2 - (x-a)^2 = 24a^2$,
∴ $x^2 + 6ax = 23a^2$ nó $(x+3a)^2 = \pm 32a^2$
Má tá $CA = AB = 2a$, fágann sin $CP = \pm a\sqrt{32}$.

Má geartar $BX = CB = 4a$ ar ingear ag B is léir go bhfuil $CX = a\sqrt{32}$, agus má's é P a gearras an ⊙ gur lár dó C agus gur ga dó CX an líne AB coinníonann P na coinníollacha.
Gheobhfar pointe eile a fheileas ar an taobh eile de C.

Sompla 3 Meánteascadh ~~Dronlíne~~ a dhéanamh ar dhronlíne AB.
.i. pointe P in AB a aimsiú ionnas go mbeidh $AB.BP = AP^2$.



Bíodh $AB = 2a$, $AP = x$, ionnas go bhfuil $PB = 2a - x$.
Tugtar $2a(2a - x) = x^2$ ∴ $x^2 + 2ax = 4a^2$ nó $(x+a)^2 = 5a^2$.
Fágann sin go bhfuil $AP = a(\sqrt{5} - 1)$.

Chun teacht ar ionad an phointe P ní mór an líne $a\sqrt{5}$ a thógáil i dtosach, agus má geartar $BC = a$ ar ingear ag B is léir go bhfuil $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 4a^2 + a^2$. ∴ Tá $AC = a\sqrt{5}$.

Nuair baintear $CQ = CB = a$ den líne sin faighfear $AQ = a(\sqrt{5}-1)$
∴ nuair geartar $AP = AQ$ ar an líne AB, sé P an pointe a bhí á lorg.

Nota Réiteach eile is ea $x = -(\sqrt{5}+1)a$, agus má cuirtear $CR = CB = a$ le AC, tá $AR = a(\sqrt{5}+1)$. Má's é Q an pointe ar shíneadh BA i gcaoi go bhfuil $AQ = AR = a(\sqrt{5}+1)$, gheobhfar amach go bhfuil $AB.BQ = AQ^2$,

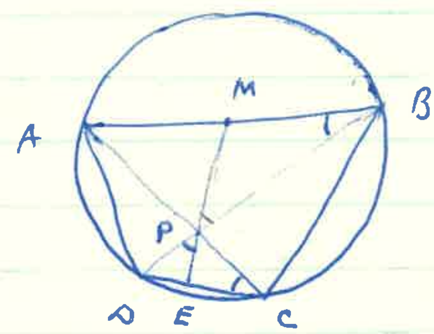
Deirtear gurb é Q pointe an mheánteascaidh amuigh

Anailís Geométreach

Nuair atá teoirim le ~~réiteach ag~~ cruthú (nó ceist le réiteach) againn, nach léir dúinn an cruthúnas roimh ré, is féidir teacht ar an réiteach go minic ar an gcuma seo a leanas.

Glac le fírinne na teoirme (nó ~~ta~~ cuir i gcás go gcomhlíonann figiúr áirithe coinníollacha na ceiste) gan cruthúnas ar bith i dtosach. De thairbhe teoirmí eile atá ar eolas againn tig linn oibriú siar uaidh agus tátaill eile a ghnóthú as. Má's féidir sa gcaoi sin tátal áirithe a fháil gurb eol a chruthúnas cheana agus gur leor fírinne an tátaill chun fírinne na teoirme a dheimhniú, tig linn cruthúnas na teoirme a bhunú ar chruthúnas an tátaill.

e.g. (1) Sa gceathairshleasán comhchiorcalach ABCD tégann na trasnáin le chéile go h-ingearach ag P. Cruthaigh go bhfuil líne cheangail P le lár AB ingearach le CD.



Tuigtear (1) gur ceathairshleasán i gciorcal é ABCD: (2) go bhfuil $A\hat{P}B = 9$
(3) go bhfuil AM = MB.

Tá le cruthú go bhfuil $PED = 90°$.

Anailís

De bhrí gur dronuillea é DPC, chun go mbeadh $P\hat{E}D = 90°$, ba leor a chruthú go bhfuil $D\hat{P}E = 90 - D = P\hat{C}E$.

i. go bhfuil $M\hat{P}B = M\hat{B}P$ (mar uillinneacha sa teascán céanna iseadh $P\hat{C}E$ agus $M\hat{B}D$).

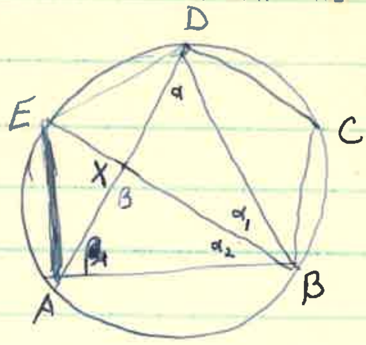
Ach ó tharla MA = MB sa Δ dronuilleach PAB, is eol dúinn gurb é M iomlár an Δ PAB, ionnus go bhfuil MP = MB agus $M\hat{B}P = M$

Dá bhrí sin is féidir cruthúnas na teoirme a bhunú ar chruthúnas na fírinne $M\hat{B}P = M\hat{P}B$.

Fágtar fá'n léitheoir an cruthúnas a chóiriú.

e.g. (2) An Uille 36° a Thógáil le Compás agus Riail

Toisc gurb shin í an uille a ghabhas slios pentagóin rialta ag an imlíne an ionchiorcail (teoirim bab VII), is ceart dúinn tréithe na fioghrach sin a bhreithniú i dtosach.



Anailís na Ceiste

Abair gur pentagón rialta é ABCDE, ionnas go bhfuil 36° san uillinn a ghabhas gach slios ag an imlíne. Ceangail DA, DB, BE.

Tá $\hat{\alpha} = 36° = \hat{\alpha}_1$ d'á réir, agus fágann sin $DX = XB$.

Mar an gcéanna tá $\hat{B}_1 = 72° = \hat{\alpha} + \hat{\alpha}_1 = \hat{\beta}$, ionnas go bhfuil $XB = BA$.

$\therefore$ Tá $DX = XB = BA$ .... (i)

De thairbhe $\hat{\alpha}_2 = 36° = \hat{\alpha}$, tadhlann AB ag B an ⊙ DXB, ionnas go bhfuil $DA \cdot AX = AB^2$ (teoirim) $= XD^2$, de réir (i).

Fágann sin $DA \cdot AX = XD^2$ .i. déantar meán-teascadh ar DA ag X .... (ii)

Nuair tugtar DA, tá X cinnteach de réir (ii), agus de bhrí go bhfuil B an fhad XD ó A is ó X de réir (i) socraíonn sé sin ionad B. Tig linn réiteach gonta a chóiriú anois mar seo.

Réiteach

Déan líne ar bith DA a mheán-teascadh ag X ionnas go bhfuil $DA \cdot AX = XD^2$. Le X agus A mar láir línigh ⊙ ar gatha dóibh XD, a ghearras a chéile in B.

Tá $ADB = 36°$, agus tá $D\hat{A}B = D\hat{B}A = 72°$.

Cruthúnas

De thairbhe $DA \cdot AX = XD^2 = AB^2$, ~~tadhlan~~ tadhlann AB an ⊙ DXB. $\therefore$ Tá $\hat{\alpha}_2 = \hat{\alpha}$.

Ach de bhrí $XB = XD$, tá $\hat{\alpha}_1 = \alpha$, ionnas go bhfuil $D\hat{B}A = 2\hat{\alpha}$.

Mar an gcéanna de bhrí $AB = XB$, tá $D\hat{A}B = \beta = \hat{\alpha} + \hat{\alpha}_1 = 2\hat{\alpha}$.

Ach tá suim uilleacha an Δ DAB $= 180°$.

Fágann sin $5\alpha = 180°$, ionnas go bhfuil $\alpha = 36°$; $D\hat{A}B = D\hat{B}A = 72°$.

QED

Nóta

Má's in Y a ghearras síneadh DE an slios AB, gheofar amach go bhfuil $AB.BY = AY^2$ .i. roinntear BA i meán-teascadh amuigh ag Y.

Tig linn an pentagón rialta a thógáil ar AB mar seo. ~~Roinn BA~~ Déan meán-teascadh amuigh ar BA ag Y, ionnas go mbeidh $AB.BY = AY^2$. Le A agus B mar láir tarraing stuaghanna ar gatha dóibh AY. Má's i bpointe D a thagas siad le chéile, faigh E, C, láir na mion-stuaghanna DA is DB sa gciorcal DAB. 'Sé ABCDE an pentagón rialta.

Cleachtaithe

1) Roinn dronlíne dírithe i bpointe P amuigh chun go mbeidh $AP.PB = b^2$.

2) Faigh pointe P ar shíneadh AB chun go mbeidh (i) $AP^2+PB^2 = b^2$; (ii) $AB^2+BP^2 = 2AP.PB$.

3) Sa △ ABC is i bpointe X a ghearras comhroinnteoir na h-uilleann A an comhchiorcal, agus tagann AX is BC le chéile in Y. Cruthuigh $XA.XY = XB^2$.

4) Pointí ar láirlíne ⊙ AB iseadh C is D agus iad comhfhada ón lár. Pointe ar bith san imlíne iseadh X. Cruthuigh $XC^2+XD^2 = AC^2+AD^2$.

5) Má's pointe é X ar bhonn BC an △ ABC chómhchosaigh, cruthuigh $AB^2-AX^2 = BX.XC$.

6) Roinneann P an líne AB istigh i gcaoi go bhfuil $AB.BP = AP^2$, agus pointe san líne iseadh X ionnas go bhfuil $PX = PB$. Cruthuigh $AP.AX = XP^2$.

7) Faigh pointe X in AB istigh ionnas go mbeidh $AB^2+BX^2 = 3AX^2$.

8) Sa △ cómhchosach ABC gearrann parallél le BC na sleasa AB is AC sna pointí D, E. Cruthuigh $BE^2-CE^2 = BC.DE$.

9) Sa △ cómhchosach ABC, tá $\hat{B} = \hat{C} = 2\hat{A}$. Cruthuigh $\frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$.

10) Má's é OX ga an ⊙ ABCDE atá ingearach leis an slios AB (áit gur pentagón rialta é ABCDE), cruthuigh go ndéanann BE meán-teascadh istigh ar an nga OX.

Má's in Y a ghearras BE agus OX, teaspáin go bhfuil XY cothrom le slios decagóin rialta a inscríobhtar sa gciorcal.

11) Má's siad p, d sleasa an pentagóin agus an decagóin rialta a inscríobhtar i gciorcal gurb é R a ga, cruthuigh $p^2+d^2=R^2$.